

SUR L'ÉTABLISSEMENT

DES

ARCHES DE PONT,

ENVISAGÉ

AU POINT DE VUE DE LA PLUS GRANDE STABILITÉ.



A PARIS, CHEZ MALLET-BACHELIER,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, n° 55.

SUR L'ÉTABLISSEMENT

DES

ARCHES DE PONT,

ENVISAGÉ

AU POINT DE VUE DE LA PLUS GRANDE STABILITÉ,

MÉMOIRE

ACCOMPAGNÉ DE TABLES POUR FACILITER LES APPLICATIONS NUMÉRIQUES,

PAR M. YVON VILLARCEAU,

MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ DES INGÉNIEURS CIVILS, DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE,
DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ASTRONOMIQUE DE LONDRES, DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES ARTS DE LILLE;
ASTRONOME À L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

EXTRAIT DU TOME XII DU RECUEIL DES SAVANTS ÉTRANGERS
PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.





PARIS.
IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

M DCCC LIII.





SUR L'ÉTABLISSEMENT

DES

ARCHES DE PONT,

ENVISAGÉ

AU POINT DE VUE DE LA PLUS GRANDE STABILITÉ.

PREMIÈRE PARTIE.

[PRÉSENTÉE A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DANS SA SÉANCE DU 10 NOVEMBRE 1845.] (*)

1. Les travaux des ingénieurs et des géomètres sur la théorie de l'équilibre des voûtes ont eu principalement pour objet, depuis Coulomb, l'examen de la stabilité des voûtes construites ou projetées. Malgré les savantes recherches auxquelles ils se sont livrés, les solutions proposées sont encore loin de satisfaire aux exigences de l'art de l'ingénieur : elles n'offrent à celui-ci que des moyens peu directs et assez incertains pour modifier les constructions à l'état de projet, dont elles ont fait connaître le défaut plus ou moins prononcé de stabilité; et le plus souvent ce n'est qu'après une suite de tâtonnements qu'on parvient à satisfaire aux conditions d'équilibre indiquées par les méthodes en usage.

Les solutions dont nous parlons seraient donc principalement

(*) Pour le Rapport, voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXIII, séance du 9 novembre 1846.

utiles dans le cas où les éléments de la construction auraient été fixés d'une manière irrévocable; elles serviraient à faire connaître si le projet doit être admis ou rejeté. Mais aussitôt que l'on consent à apporter quelques modifications dans la courbure, soit de l'intrados, soit de l'extrados, ou dans les épaisseurs des voussoirs, on peut envisager la question sous un autre point de vue, et se proposer de déterminer complétement la forme de la voûte, de telle sorte qu'il en résulte une construction jouissant de la plus grande stabilité possible, et assujettie d'ailleurs à des conditions particulières qui sont relatives aux dimensions de l'arche en largeur et hauteur, à la charge qui doit s'élever au-dessus du plan horizontal tangent à l'extrados et à la résistance des matériaux employés. Le problème ainsi posé est celui qui se présente ordinairement dans la pratique.

Dans une série non encore terminée d'articles publiés dans la *Revue de l'Architecture et des Travaux publics* de M. César Daly, nous avons présenté la théorie de l'équilibre des voûtes en berceaux cylindriques sous le point de vue qui vient d'être indiqué. Parvenu à l'examen du cas particulier des ponts, la nécessité d'avoir égard à l'action du massif qui charge la voûte nous a présenté quelques difficultés. Nous n'avons pu lever ces difficultés qu'en assujettissant l'extrados à une discontinuité théorique, présentant, il est vrai, peu d'inconvénients dans la pratique, mais laissant à l'esprit une impression peu favorable. La solution que nous avons donnée dans la *Revue de l'Architecture* résulte d'une condition arbitraire, celle de l'égalité de pression par unité de surface dans tous les joints de la voûte : on peut conserver cette solution comme se rattachant à la classification que nous avons donnée des questions relatives à l'équilibre des voûtes. Mais rien n'oblige absolument à satisfaire en toute rigueur à la condition de l'uniformité des pressions dans les joints, et l'on peut maintenir la continuité de la surface extrados, sans qu'il en résulte une variation de pression trop considérable. Ajoutons que notre précédente solution n'est pas complète, analytiquement parlant : nous n'avons

effectué que l'une seule des deux intégrations qui doivent conduire à l'équation de la courbe intrados, de sorte que le résultat final dépend de tracés ou de quadratures. Abandonnant la condition qui avait eu pour conséquence la discontinuité de l'extrados, nous avons obtenu, depuis ce premier essai, une solution analytique complète, indépendamment de la solution graphique. Nous pensons que le Mémoire actuel, qui renferme l'exposé de nos recherches, ne sera point indigne de fixer l'attention de l'Académie des sciences, et offrira d'utiles renseignements aux ingénieurs.

Nous nous bornons dans ce Mémoire à l'examen du cas le plus important des arches de pont en berceaux terminés par des plans de tête perpendiculaires à l'axe, celui d'une arche chargée d'un massif terminé supérieurement par un plan horizontal.

Les équations finales que nous obtenons ne peuvent être résolues directement. En laissant de côté le moyen que présenterait la construction de tables spéciales pour tirer à vue la valeur des inconnues, nous sommes obligé d'avoir recours aux méthodes de tâtonnements, telles que celles des fausses positions ou des courbes d'erreurs; mais les tâtonnements se distinguent ici de ceux que nous avons signalés plus haut, en ce que, soit qu'on les effectue graphiquement ou numériquement, ils correspondent à des constructions stables, ce qui n'a pas lieu dans l'autre cas. Cette circonstance permet même de réduire le nombre des essais, attendu que si l'un d'eux ne s'éloigne pas trop de satisfaire aux données de la question, on peut adopter l'hypothèse sur laquelle il est basé, et modifier l'une des données, la demi-ouverture, qui n'est jamais déterminée avec une rigoureuse précision, en l'altérant de quelques centimètres, de manière que les équations de condition soient satisfaites.

La solution que nous proposons conduit à des formes de l'intrados différentes des formes généralement usitées, mais dont le tracé peut néanmoins s'effectuer par les procédés qu'on emploie lorsqu'il s'agit d'anses de panier. En cela nous nous conformons aux habitudes des ingénieurs : seulement, il arrive à ceux-ci de

déterminer les rayons de courbure de manière à donner à l'intrados une forme qui diffère le moins possible de celle d'une demi-ellipse, ou de n'employer qu'un seul arc de cercle, sans qu'aucune raison les porte à préférer ces courbes à d'autres, sinon la simplicité de leur construction; tandis que, d'après notre théorie, les rayons de courbure varient suivant une loi différente de celle qui a lieu dans l'ellipse, et dans le cercle où les rayons de courbure sont constants.

Le tracé de l'intrados, au moyen de ses rayons de courbure que nous pouvons construire géométriquement, nous offre une solution du problème. L'exactitude de cette solution ne dépend que de celle du tracé, et se trouve suffisante dans la plupart des cas.

2. Nous avons cru devoir faire précéder l'exposé de notre théorie d'une discussion sur l'indétermination du problème des voûtes en berceau, indétermination qui ne peut être levée qu'en ayant égard à la compressibilité de la matière des voussoirs; mais la théorie de la déformation des corps solides d'une structure analogue à celle des pierres à bâtir nous a paru trop peu avancée pour tenter utilement d'en faire la base d'une théorie de l'équilibre des voûtes. Nous avons donc dû diriger nos recherches d'un autre côté, en nous proposant d'obtenir des résultats indépendants, autant que possible, de la compressibilité des matériaux. Nous croyons avoir atteint notre but en substituant à la voûte en berceau une construction purement idéale, dont on peut soumettre toutes les circonstances au calcul, sans craindre d'y rencontrer l'indétermination dont nous venons de parler, et telle, néanmoins, qu'en la comparant à la voûte proposée, on puisse affirmer évidemment que si la première est en équilibre, il en sera de même *a fortiori* de la seconde. Les conditions que l'on fixe en envisageant le problème de cette manière sont confirmées *a posteriori* par une discussion relative aux effets produits par les surcharges accidentelles.

La considération des différents modes d'action des matériaux

qui composent le massif, sur les voussoirs, met en évidence une autre indétermination qui se présente à un haut degré près des plans de tête, dans les arches dont les parements extérieurs sont extradossés *en gradins*. Pour éviter la difficulté que présente cette nouvelle indétermination, nous sommes obligé de substituer à l'arrangement plus ou moins fortuit des matériaux du massif, une autre disposition idéale présentant quelque analogie avec les constructions usitées, et qui jouit de la propriété de donner lieu à des pressions normales à l'extrados et déterminées. L'action des matériaux du massif sur les reins de la voûte provenant de cette disposition idéale est la même que si la voûte était chargée d'un fluide ayant la densité et la forme du massif. Nous aurions pu, comme plusieurs auteurs, partir immédiatement de l'hypothèse de la fluidité; mais il nous a paru bon d'indiquer à quel mode de disposition répond cette hypothèse que nous adoptons, d'accord en cela avec de savants ingénieurs.

L'application des équations de l'équilibre au système idéal dont nous nous occupons ne peut se faire sans restrictions : on sait que ces équations ne sont satisfaites que lorsque les corps, après avoir été comprimés ou distendus, sont parvenus à un état permanent, sous l'influence des forces extérieures. Les résultats que nous déduisons de ces équations sont donc uniquement relatifs à l'état normal de la voûte après le décintrement, et la question de *l'inflexion* reste entière : on observera toutefois que nous fournissons les moyens de l'aborder, en déterminant la forme finale de la voûte. Quoique nous ne traitions point cette question *in extenso*, nous indiquons cependant les causes qui peuvent produire l'*inflexion*, et les moyens d'en éviter les principales. Nous sommes porté à croire que si les pieds-droits sont inébranlables et les joints de la voûte très-fins, une construction réalisée suivant nos principes ne donnera lieu qu'à une diminution de flèche si petite, qu'on pourra presque ne pas s'en préoccuper.

Sous les restrictions qui précèdent, nous avons mis le problème en équation, et ramené les principales difficultés analytiques à l'in-

tégration de l'équation différentielle de la courbe intrados. Cette équation contient un radical recouvrant un polynôme du quatrième degré; et son intégration, qui dépend des fonctions elliptiques, exige, comme on le sait, la décomposition du polynôme en ses facteurs du premier degré, ou la résolution d'une équation du quatrième. L'expression algébrique des racines est ici nécessaire pour conserver à la question toute sa généralité; nous avons pu l'obtenir par la réduction de ces racines en séries ordonnées suivant les puissances des épaisseurs, en bornant là, comme dans tous nos calculs, l'approximation aux termes du second ordre, ce qui suffit parfaitement. A l'aide de développements analogues, nous avons réussi à éviter l'emploi des fonctions elliptiques de troisième espèce, et obtenu une intégrale qui se simplifie notablement dans le cas assez ordinaire où la voûte et le massif peuvent être considérés comme ayant la même densité. La faible charge des voûtes de pont au-dessus de la clef rend le module peu différent de l'unité, de sorte que l'on peut suppléer aisément aux Tables de fonctions elliptiques. Enfin, nous présentons deux vérifications analytiques qui, jointes à des confirmations d'une autre nature, ne nous permettent pas d'avoir le moindre doute sur l'exactitude de nos développements.

Nous limitons l'usage de l'équation de courbe intrados à la détermination de l'inconnue principale, regardant le calcul des différences finies comme plus praticable lorsqu'il s'agit de calculer une suite de coordonnées de divers points d'une courbe : la méthode que nous indiquons à ce sujet, fait tout dépendre de l'expression du rayon de courbure, et nous affranchit du besoin de recourir aux fonctions elliptiques pour effectuer ces calculs.

Les constantes introduites par l'intégration sont au nombre de trois. Ce sont : 1° la hauteur de la charge qui s'élève au-dessus de la clef; 2° l'épaisseur à la clef; 3° une ligne égale à la hauteur d'une colonne de la matière des voussoirs dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans le voussoir de clef. En supposant donnée la première de ces constantes,

l'une des deux autres reste arbitraire dans les arches du genre de celles en *arc de cercle*, où la direction du joint des naissances n'est point fixée. Si l'on prend pour la troisième constante une valeur indiquée par la résistance des matériaux, l'épaisseur à la clef en résulte. Dans les arches en *anse de panier*, où le joint inférieur est sensiblement horizontal, les deux dernières constantes sont nécessairement déterminées; mais il peut se faire que leurs valeurs données par le calcul répondent à des pressions auxquelles les voussoirs soient incapables de résister, ou tellement faibles, qu'il en résulterait un emploi peu économique des matériaux : il devient alors nécessaire de modifier les données dans un sens que nous indiquons suivant le cas. Il est d'ailleurs convenable de se ménager la possibilité de faire varier les données dans de certaines limites, afin de pouvoir, au besoin, tenir compte de l'effet des surcharges accidentelles.

L'épaisseur à la clef est l'inconnue à la détermination de laquelle se ramène la solution du problème des arches de pont, et, en l'absence de tables, on n'en peut obtenir la valeur que par des approximations successives. Nous donnons, dans chaque cas, des valeurs approchées qui diffèrent assez peu des valeurs exactes de l'inconnue dont il s'agit, pour servir utilement de point de départ dans les calculs d'approximations successives.

L'importante question de la poussée contre les culées, dont la solution sert de base aux calculs relatifs à l'établissement de ces dernières, est résolue au moyen de nos formules, dès que la détermination de l'épaisseur à la clef est effectuée.

Nous terminons la première partie de notre Mémoire en présentant le résultat de comparaisons entre des arches établies suivant nos principes et des arches en *arc de cercle* ayant même épaisseur aux naissances. Ces dernières offrent moins de convexité vers les reins; et la différence des deux intrados paraît assez petite pour qu'on soit tenté d'adopter l'arc de cercle, à cause de la facilité qu'il offre dans la construction. On tomberait néanmoins dans une grave erreur en admettant cette conséquence : en effet, nous

faisons voir, dans le cas de l'*arc de cercle*, qu'à l'endroit où celui-ci s'écarte le plus de l'intrados construit suivant notre théorie, la résultante des pressions dans les joints peut se rapprocher de l'extrados, jusqu'à n'en être plus distante que d'une quantité égale au tiers de l'épaisseur des voussoirs : cela donne lieu, vers l'extrados, à des pressions par unité de surface, doubles de celles qui ont lieu dans l'autre arche, tandis que la pression vers l'intrados décroît jusqu'à devenir nulle. Il est facile d'en conclure que les voussoirs devront, dans ce cas, présenter une résistance double de celle qu'exigerait l'application de notre théorie. Les intrados des arches *en anse de panier* diffèrent aussi de nos courbes par une moindre convexité vers les reins, et donnent lieu à des remarques analogues aux précédentes.

La convexité vers les reins dans les arches de pont présente des avantages dont il est bon de profiter : car, outre la plus grande facilité qui en résulte pour l'écoulement des eaux, elle offre un aspect agréable et un caractère de hardiesse que l'on aime à rencontrer dans les constructions de ce genre.

INDÉTERMINATION DU PROBLÈME DE L'ÉQUILIBRE DES VOÛTES EN BERCEAU.

3. On est dans l'habitude, lorsqu'il s'agit d'appliquer les principes de la statique, de considérer les corps comme absolument durs et incompressibles, et il est exact de dire, comme l'a fait remarquer M. Poncelet, que lorsque les corps compressibles ou extensibles sont parvenus à un état permanent, sous l'influence de forces extérieures, l'action de ces forces est la même que si ces corps étaient vraiment invariables de forme. Nous raisonnerons dans cette hypothèse, afin de n'employer que les principes les plus simples de la statique.

Considérons donc une portion de voûte comprise entre deux plans de joint quelconques, et supposons connue l'action, sur cette voûte, de la portion du massif de maçonnerie qui agit sur elle, ainsi que le poids même de cette portion de voûte; nous dési-

gnerons par R la résultante de ces deux forces, qui en général ne se réduiront point à un couple. Les autres forces extérieures qui sollicitent la voûte sont les pressions ou réactions qui s'exercent sur chacun des plans de joint extrêmes; soient T et T′ les résultantes de ces forces. La voûte étant en berceau, et les plans de tête perpendiculaires à l'axe, l'action des forces reste la même dans deux tranches d'égale épaisseur, déterminées par des sections parallèles aux plans de tête; nous pouvons dès lors considérer l'équilibre d'une tranche infiniment petite, ou simplement appliquer le principe relatif à l'équilibre d'un corps sollicité par trois forces situées dans un même plan, principe qui consiste en ce que la résultante de deux des forces est égale et opposée à la troisième. Prenons donc un point quelconque *r*, sur la direction de R; puis, par ce point, menons deux droites qui rencontrent les surfaces des joints extrêmes en deux points *t* et *t′*, et décomposons R suivant ces directions : les composantes de R pourront théoriquement être regardées comme égales et opposées aux réactions inconnues T et T′, d'après le principe énoncé. Si l'on réduit, en effet, les surfaces de contact aux seuls points *t* et *t′*, et que l'on ait égard à l'hypothèse relative à la dureté parfaite, en supposant d'ailleurs les points *t* et *t′* susceptibles de réagir dans tous les sens, les réactions T et T′ deviendront effectivement égales et opposées aux composantes de R obtenues ci-dessus.

En réalité, pour que les forces égales et opposées à ces composantes puissent être regardées comme donnant l'expression des réactions T et T′, il faudra, 1° que leur point de concours *r*, situé sur R, soit tellement choisi qu'elles ne deviennent point des forces de traction, à moins qu'on ne veuille avoir égard à l'adhésion des mortiers (le maximum de leur intensité dépendrait alors de cette adhésion); 2° les directions des composantes devront faire, avec les normales aux surfaces de joint, des angles inférieurs à l'angle du frottement, et dans le cas où l'on aurait égard à la cohésion des mortiers, ces angles devront rester plus petits que le plus grand des deux angles de frottement et de cohésion; 3° enfin, les points

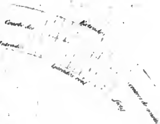
t et t' ne devront point être assez voisins de l'intrados ou de l'extrados, eu égard à l'intensité de T et T', pour que les voussoirs se brisent vers ces parties. Les intensités T et T' se trouveront limitées par la considération de l'étendue hypothétique des surfaces de contact et de la position des points t et t'; il faudra que T et T' rentrent dans les limites qui en résulteront.

Malgré ces restrictions, qui limitent l'étendue dans laquelle les points r, t et t' peuvent être pris arbitrairement sur la direction de R et les surfaces extrêmes, le problème qui consiste à déterminer T et T' reste susceptible d'une infinité de solutions. (On a coutume de limiter encore les solutions en partageant la voûte en deux parties symétriques au moyen d'un plan vertical mené par l'axe et le sommet; et par motif de symétrie on admet que la réaction T qui a lieu au sommet est horizontale.) Toutefois, quel que soit le système de valeurs que l'on admette pour T et T', ces valeurs une fois fixées, les résultantes des réactions dans tous les plans de joints compris entre les extrêmes se trouvent déterminées; on les construit graphiquement avec la plus grande facilité. En effet, considérant le premier voussoir à partir du sommet, on compose l'action de la charge qui le sollicite, avec son propre poids, puis la réaction T qui a lieu au sommet de la voûte, avec la résultante des premières forces; la résultante des trois forces est égale et opposée à la réaction du deuxième voussoir sur le premier, et par conséquent égale à la réaction du premier sur le deuxième, et de même sens que cette réaction résultante. On obtient ainsi de proche en proche toutes les réactions intermédiaires, et la dernière, obtenue par le même procédé, doit, si l'on opère bien, coïncider avec celle T' faisant partie du système de valeurs T et T' d'où l'on est parti. Les réactions intermédiaires sont assujetties, quant à leurs intensités, directions et points d'application, aux mêmes conditions que ci-dessus, pour que l'équilibre puisse avoir lieu; et ce n'est que lorsqu'on a trouvé un système de valeurs de T et T' tel que toutes les autres réactions qui en résultent satisfassent à ces conditions, que l'on est

fondé à regarder l'équilibre de la voûte comme pouvant être stable. Ordinairement, quand on a trouvé une solution, il est rare qu'on n'en trouve pas une infinité d'autres comprises entre des limites plus ou moins resserrées, mais il est impossible de prévoir laquelle de ces solutions se réalisera, ou même si l'équilibre aura lieu, sans introduire dans le calcul la considération de la compressibilité de la matière des voussoirs. Or, avons-nous dit, la théorie de la déformation des corps solides tels que les pierres à bâtir, est trop peu avancée pour que l'on puisse en faire la base d'une théorie de l'équilibre des voûtes. C'est ce qui nous a mis dans la nécessité de substituer à une voûte proposée la construction idéale dont il a été question au n° 2, et qui va être décrite dans un instant. Rappelons cependant que le mode d'action sur les voussoirs, du massif qui charge la voûte, doit offrir un nouveau genre d'indétermination dont nous aurons à nous débarrasser en procédant d'une manière analogue; mais pour ne point compliquer inutilement les discussions, nous supposerons d'abord que l'action de la charge s'exerce normalement à l'extrados des voussoirs, sauf à ramener ensuite à ce cas celui dont nous nous occupons actuellement.

ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE D'UNE VOÛTE EN BERCEAU SOUMISE À L'ACTION DE FORCES AGISSANT NORMALEMENT À L'EXTRADOS.

4. Considérons une portion de voûte comprise, d'une part, entre deux plans parallèles aux plans des têtes, et distants d'une quantité quelconque λ, qu'on pourra, si l'on veut, supposer égale à l'unité linéaire ou même infiniment petite; et, d'autre part, terminée par deux plans perpendiculaires à l'extrados.



Supposons la voûte divisée en voussoirs infiniment petits, par des plans de joint normaux à l'extrados. De cette division résultera la possibilité d'assigner la position du centre de gravité de chaque voussoir élémentaire : nous nommerons *courbe des centres de gravité* la courbe passant par tous ces centres.

Prenons sur chacune des normales un point voisin de l'intrados situé à une distance du centre de gravité correspondant, égale à celle qui sépare l'extrados de ce même centre; nous obtiendrons une nouvelle courbe que nous appellerons, pour abréger, *intrados fictif*.



Imaginons maintenant que, sans altérer en rien le poids des voussoirs élémentaires, la position de leur centre de gravité et l'action des forces normales à l'extrados, on les déforme de manière à réduire la surface de contact de deux voussoirs voisins, à l'étendue de l'élément superficiel correspondant aux arêtes ou génératrices qui ont leurs pieds sur la *courbe des centres de gravité*. Faisons, de plus, abstraction du frottement des voussoirs et de la résistance qu'oppose l'adhésion des mortiers à leur glissement les uns sur les autres.

Il est évident que si l'équilibre peut exister dans un système établi suivant ces hypothèses, il existera *a fortiori* dans un système où des séries de voussoirs infiniment petits seront changées en voussoirs de dimensions finies, et lorsqu'on remplacera le contact de deux arêtes par celui des surfaces de joint comprises entre l'extrados et l'intrados fictif, c'est-à-dire lorsque la presque totalité de la surface de chaque joint sera rétablie, de manière à donner lieu aux frottements, et à pouvoir mettre en jeu l'adhésion des mortiers, suivant le besoin; le rôle de ces forces étant de s'opposer au glissement quand il tend à se produire. Nous dirons plus; c'est que ces dernières forces ne se développeront pas, tant du moins

que la voûte restera soumise aux seules forces qu'on aura fait entrer dans les équations de son équilibre : en effet, puisque l'équilibre est supposé devoir exister sans l'intervention des frottements et adhésions, il n'y aura aucune tendance au mouvement dans un sens déterminé pour quelque voussoir que ce soit, et comme le frottement ne prend naissance que par suite de cette tendance, il est clair qu'il ne se produira aucun frottement; il en sera de même des effets de l'adhésion des mortiers. Ces forces ne se développant point dans notre voûte à son état normal, il est inutile, comme on le voit d'ailleurs assez clairement, de les faire entrer dans les équations de son équilibre.

Pour compléter la transformation de la construction idéale en la construction réelle proposée, il eût fallu rétablir le contact des voussoirs dans toute l'étendue comprise entre l'extrados et l'intrados, tandis que nous l'avons étendu seulement à l'espace compris entre la première de ces courbes et l'intrados fictif, comme cela aurait lieu si l'on pratiquait dans les joints un refouillement d'une profondeur égale à la très-petite distance qui sépare l'intrados fictif de l'intrados réel, distance qui n'atteindra jamais qu'un petit nombre de centimètres. Nous allons donner la raison de la nécessité qu'il en soit ainsi, du moins théoriquement. Dans la construction idéale, la résultante des pressions dans les joints passe par l'arête de contact située sur la *courbe des centres de gravité*, ou bien par le milieu du joint limité, comme nous venons de le dire dans la construction réelle; et l'on peut admettre qu'après le rétablissement du contact des surfaces planes de joint, la pression se distribuera uniformément sur ces surfaces, de même qu'on admet en pratique que les pressions se distribuent uniformément sur les surfaces quand les résultantes passent par leurs *centres de gravité*. C'est sur cette hypothèse que l'on s'appuie pour déduire des expériences connues les coefficients de résistance à l'écrasement. On sera d'autant mieux fondé à admettre l'égalité de la répartition des pressions, qu'on pourra la faciliter par l'introduction dans les joints d'une mince couche de ciment très-fin.

Si nous avions étendu la surface de joint jusqu'à l'intrados réel, la compressibilité de la matière des voussoirs eût pu avoir pour effet de déplacer la résultante des pressions, en tendant à la ramener vers le milieu du nouveau joint, et nous eussions eu à considérer le lieu géométrique de son point d'application aux divers voussoirs : l'introduction des coordonnées de cette courbe dans les équations du problème les compliquerait beaucoup plus que ne le fera la considération de l'intrados fictif qui, dans tous les calculs, exclura l'intrados réel. Pour nous, moyennant les conventions précédentes, les courbes *des centres de gravité* et des *résultantes des pressions* se confondront en une seule et même courbe. Quant à la condition relative au refouillement des joints, pour que ces courbes se confondent théoriquement, on pourra juger, d'après le faible intervalle qui sépare les intrados réel et fictif, du peu d'importance qu'il y aurait à s'y conformer pratiquement, dans le plus grand nombre des cas. Si l'on s'abstient d'effectuer ce refouillement, il n'en pourra résulter qu'une faible variation de la pression par unité de surface dans l'étendue de chaque joint.

Enfin, disons que la résultante des pressions étant assujettie à passer par les centres de gravité, c'est-à-dire très-près du milieu de l'épaisseur des voussoirs, et à être normale aux plans de joint, la voûte acquerra par cela même un grand degré de stabilité. En effet, quand la voûte sera soumise accidentellement à des charges auxquelles on n'aura point eu égard en fixant les conditions de son établissement, l'action de celles-ci sera, tant que l'équilibre pourra subsister, de déplacer le point d'application et la direction de la résultante des pressions en faisant varier l'intensité de cette dernière. Or, pour que le point d'application de la résultante puisse se déplacer dans un sens ou dans l'autre, sans trop se rapprocher de l'intrados ou de l'extrados, il est évident qu'il doit coïncider avec le point milieu de l'épaisseur lorsque les surcharges dont il s'agit n'ont pas lieu, c'est-à-dire lorsque la voûte est soumise à l'action des seules forces qu'on a fait entrer dans le calcul qui a servi de base à sa construction. D'un autre côté, la direction

de la résultante des pressions devant pouvoir s'écarter de celle qui répond à l'absence des surcharges accidentelles, sans cependant faire avec la normale aux plans de joint un angle qui atteigne le plus grand des deux angles du frottement et de la cohésion, il est également évident que la résultante des pressions doit être normale aux plans de joint dans l'état ordinaire de la voûte. Or l'équation (*d*) du numéro suivant exprime précisément la même condition à laquelle il nous sera facile de satisfaire. Il résulte de ces considérations que le système dont nous nous occupons jouira d'une très-grande stabilité, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut. Nous aurions presque pu nous dispenser de les présenter ici, tant elles sont évidentes : nous ferons seulement observer qu'en nous fondant sur ces considérations, il nous eût été facile d'éviter la substitution d'un système idéal à la réalité; mais il nous a semblé bon de présenter nos idées dans l'ordre où elles se sont produites.

Quant à la stabilité au point de vue de l'effet de surcharges accidentelles considérables; pour la constater sûrement, il resterait à s'assurer que, sous l'influence de ces surcharges, la résultante des pressions ne peut nulle part se rapprocher de l'intrados ou de l'extrados d'une quantité inférieure au tiers de l'épaisseur des voussoirs; que la pression maximum par unité de surface n'excédera pas la charge que peuvent supporter les matériaux sans inconvénient; enfin, que la direction de la résultante ne s'écartera de la normale aux plans de joint, que de quantités inférieures aux angles de frottement et de cohésion.

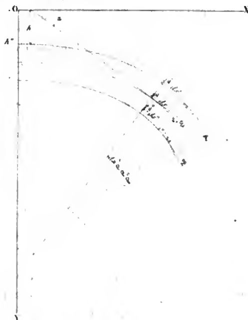
5. Ceci posé, avant de former les équations de l'équilibre du système idéal décrit ci-dessus, nous devons rappeler ce que nous avons dit, n° 3, relativement à l'application aux corps compressibles, des équations d'équilibre établies pour des corps de forme invariable, et faire remarquer que les conséquences auxquelles nous pourrons être conduit, s'appliqueront seulement à la voûte parvenue à son état permanent. Si nous déterminons la forme que doit conserver la voûte dans cet état, nous ne serons pas dispensé

pour cela de rechercher la forme qu'on doit lui donner pendant qu'elle repose sur ses cintres, forme qui soit telle, qu'après le décintrement elle se change en celle qui répond à l'état permanent. En un mot, la question de *l'inflexion de la voûte* restera tout entière; mais nous aurons fourni le moyen de l'aborder en déterminant une donnée indispensable de la question, la forme finale de la voûte : n'ayant point l'intention de la traiter ici, nous nous contenterons d'indiquer les causes qui peuvent contribuer à produire *l'inflexion* et les moyens d'éviter les principales.

Une des causes de l'inflexion des voûtes est dans la diminution de longueur de l'arc de la voûte, mesuré dans le sens de l'extrados ou dans celui de l'intrados, d'où résulte une diminution de la flèche ou un surbaissement : cette diminution de longueur de la voûte provient de la compression qu'éprouvent ses parties, et souvent de celle du mortier dans les joints; il importerait donc de diminuer l'épaisseur de ceux-ci, et d'employer, pour les remplir, des mortiers ou ciments qui se solidifient promptement ou avant que les effets de la compression puissent devenir sensibles. Disons que les constructeurs habiles se sont rendu compte de ces effets, et qu'ils emploient, pour les prévenir, les moyens dont il est question ici. Mais une autre cause de l'inflexion ou du surbaissement, à laquelle on ne paraît pas avoir beaucoup fait attention, provient de l'habitude où l'on est d'opérer le décintrement avant d'avoir achevé le massif ou tout au moins chargé les reins: or les formes d'arches généralement adoptées ne s'éloignent pas beaucoup de celles que notre théorie assigne aux voûtes chargées; si donc ces formes conviennent à l'équilibre sous l'influence de la charge, elles ne conviennent plus en l'absence de cette charge, et la voûte, abandonnée à elle-même lors du décintrement, doit se déformer en se surbaissant, ce qui arrive effectivement. On éviterait la plus grande partie de cet effet, en n'opérant le décintrement qu'après la construction entière du massif. Il pourrait bien se produire encore une inflexion, mais elle serait générale, et la déformation beaucoup moindre que dans le cas

contraire, où la clef s'abaisse, tandis que les reins se relèvent; le surbaissement final se trouverait donc considérablement diminué, il ne proviendrait plus alors que du resserrement des joints et de la compression des voussoirs.

Maintenant, désignons par :



x', y' les coordonnées d'un point quelconque de l'extrados, rapportées à des axes OX et OY, l'un horizontal, l'autre vertical, et parallèles aux plans des têtes;

α l'angle de la tangente en ce point avec l'axe des x;

x, y les coordonnées du point de la *courbe des centres de gravité* situé sur la normale à l'extrados menée par le point (x', y');

x'', y'' les coordonnées du point de l'intrados fictif situé sur la même normale;

ds', ds et ds'' les éléments de chacune des trois courbes précédentes, compris entre la normale à l'extrados et une autre normale menée par le point infiniment voisin, dont $x' + dx'$, $y' + dy'$ sont les coordonnées;

ε l'épaisseur de la voûte au point (x', y'), c'est-à-dire la partie de la normale comprise entre l'extrados et l'intrados réel;

e l'épaisseur fictive, ou la partie de la normale comprise entre l'extrados et l'intrados fictif;

δ la distance qui sépare le milieu de l'épaisseur réelle du voussoir de la position de son centre de gravité, de sorte qu'on ait la relation $\frac{1}{2}\varepsilon - \delta = \frac{1}{2}e$;

ρ', ρ et ρ'' les rayons de courbure des trois courbes en leurs points situés sur la même normale;

dP le poids du voussoir infiniment petit, compris entre les deux normales infiniment voisines;

ϖ le poids de l'unité de volume de la matière des voussoirs;

N' la pression normale exercée sur l'extrados, par unité de surface, au point (x', y');

T la résultante des pressions exercées perpendiculairement au premier joint de la partie de voûte considérée, par les parties extérieures de la construction;

T_1 la résultante des pressions exercées perpendiculairement au dernier plan de joint, par la voûte elle-même, sur les parties de la construction avec lesquelles elle est en contact : à cause de la réaction égale et contraire à l'action, T_1 exprimera en même temps l'intensité de la réaction reçue par le dernier voussoir; le sens de cette réaction sera contraire à celui de T_1;

t et t_1 les pressions par unité de surface correspondantes à T et T_1;

μ la hauteur variable d'une colonne prismatique de la matière des voussoirs, dont le poids produirait, sur une base horizontale, la pression t par unité de surface, d'où $\varpi\mu = t$;

μ_1 la hauteur de la colonne correspondante à t_1, de sorte que l'on ait $\varpi\mu_1 = t_1$;

i le rapport de la densité des matériaux qui composent la charge de la voûte à celle des voussoirs, de sorte que le poids de l'unité de volume des premiers soit $i\varpi$.

Les forces extérieures à l'arc de voûte sont :

1° La pression résultante T qui agit en un point (x, y) de la *courbe des centres de gravité*, perpendiculairement à la normale à l'extrados ou parallèlement à la tangente à cette courbe, c'est-à-dire en faisant l'angle α avec l'axe de x; ses composantes suivant X et Y, sont respectivement $T\cos\alpha$, et $T\sin\alpha$.

2° La pression T_1 agissant à l'autre extrémité de l'arc de voûte en un point (x_1, y_1) de la courbe des centres de gravité, suivant une direction opposée à celle de la tangente à l'extrados, ou faisant avec l'axe des x l'angle $180° + \alpha_1$; de telle sorte que ses composantes suivant X et Y, sont $-T_1\cos\alpha_1$ et $-T_1\sin\alpha_1$.

3° Les divers poids dP des voussoirs, dont les points d'application appartiennent à la courbe des centres de gravité : leurs composantes suivant X et Y, sont zéro et dP.

4° La pression exercée normalement sur chacun des voussoirs élémentaires avec l'intensité N' par unité de surface. Or, la profondeur de la voûte parallèlement à l'axe étant λ, la surface élémentaire de l'extrados est $\lambda ds'$, d'où résulte $N'\lambda ds'$ pour la valeur de l'action exercée sur un voussoir élémentaire. On la supposera dirigée vers le centre de courbure. (S'il en était autrement, comme cela pourrait avoir lieu, dans le cas d'arches complétement submergées ou destinées à recouvrir des conduites souterraines, le signe de N' pourrait être changé.) Les coordonnées des points d'application de cette force sont celles x' et y' de l'extrados. On obtiendra ses composantes, en observant que la normale fait avec l'axe des x, l'angle $90° + \alpha$, et avec l'axe des y l'angle α, dont les cosinus sont respectivement $-\sin\alpha$ et $+\cos\alpha$; les composantes de cette force sont donc :

$$\text{suivant X,}\quad -N'\lambda ds'\sin\alpha = -N'\lambda dy';$$
$$\text{suivant Y,}\quad +N'\lambda ds'\cos\alpha = +N'\lambda dx'.$$

Si nous appliquons maintenant à la portion d'arc de voûte les six équations d'équilibre d'un corps solide qui doivent également être satisfaites dans le cas d'un système de corps solides, nous remarquerons que toutes les forces agissant dans des plans parallèles, la somme des projections de ces forces sur un axe perpendiculaire à ces plans est nécessairement nulle. L'une des équations dite *de translation* est ainsi naturellement satisfaite. Si, pour plus de simplicité, on suppose λ infiniment petit, ce qui réduit toutes les forces à être situées dans un même plan, celui des xy, les directions des forces coupant les deux axes ou bien leur étant parallèles, les moments de rotation autour de ces axes seront nécessairement nuls, et deux des équations dites *de rotation* seront également satisfaites : en sorte qu'il suffit d'écrire les équations qui expriment que les sommes des projections des forces sur les axes X et Y sont nulles, et celle exprimant que la somme des moments de ces forces autour d'un troisième axe perpendiculaire au plan des deux premiers, est également nulle.

Ces équations sont

$$\left.\begin{array}{l} -\mathrm{T}_1\cos\alpha_1+\mathrm{T}\cos\alpha-\int \mathrm{N}'\lambda dy'=0,\\ -\mathrm{T}_1\sin\alpha_1+\mathrm{T}\sin\alpha+\int \mathrm{N}'\lambda dx'+\int d\mathrm{P}=0,\\ \left.\begin{array}{l} -y_1\mathrm{T}_1\cos\alpha_1+y\mathrm{T}\cos\alpha-\int \mathrm{N}'\lambda y'dy'\\ +x_1\mathrm{T}_1\sin\alpha_1-x\mathrm{T}\sin\alpha-\int \mathrm{N}'\lambda x'dx'-\int xd\mathrm{P}\end{array}\right\}=0.\end{array}\right\}(a)$$

Nous passerons facilement aux équations relatives à l'équilibre d'un voussoir élémentaire en réduisant dans les équations (a) les différences $\alpha_1-\alpha$, à la différentielle $d\alpha$, x_1-x, et y_1-y à dx et dy; les intégrales contenues dans les mêmes équations se réduiront à un de leurs éléments, et les différences de deux termes composés de même en α, x, y, T, et α_1, x_1, y_1, T_1, se réduiront aux différentielles de ces termes. De cette manière, les équations différentielles du problème seront

$$\left.\begin{aligned} &-d.\mathrm{T}\cos\alpha - \mathrm{N}'\lambda dy' = 0, \\ &-d.\mathrm{T}\sin\alpha + \mathrm{N}'\lambda dx' + d\mathrm{P} = 0; \end{aligned}\right\} (b)$$

$$-d.y\mathrm{T}\cos\alpha + d.x\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{N}'\lambda(y'dy' + x'dx') - xd\mathrm{P} = 0. \quad (c)$$

Nous allons changer la forme des deux premiers termes de la dernière de ces équations, en effectuant comme il suit les différentiations indiquées :

$$d.y\,\mathrm{T}\cos\alpha = y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + \mathrm{T}\cos\alpha\,dy,$$
$$d.x\,\mathrm{T}\sin\alpha = x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha + \mathrm{T}\sin\alpha\,dx.$$

Au moyen de ces relations, et en observant que l'on a $\cos\alpha = \frac{dx'}{ds'}$, $\sin\alpha = \frac{dy'}{ds'}$, nous pourrons mettre l'équation (c) sous la forme

$$-y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{T}\left(\frac{dx'}{ds'}dy - \frac{dy'}{ds'}dx\right)$$
$$- \mathrm{N}'\lambda(y'dy' + x'dx') - xd\mathrm{P} = 0.$$

Or nous pouvons simplifier cette équation au moyen des équations (b); multiplions la première de celles-ci par y et la deuxième par x, puis retranchons, il viendra

$$-y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{N}'\lambda(ydy' + xdx') - xd\mathrm{P} = 0.$$

De cette équation et de la précédente on déduit

$$\mathrm{T}\left(\frac{dx'}{ds'}dy - \frac{dy'}{ds'}dx\right) + \mathrm{N}'\lambda[(y' - y)dy' + (x' - x)dx'] = 0;$$

mais, comme les points (x, y) et (x', y') sont situés sur la même normale à l'extrados, les coordonnées x et y satisfont à l'équation de cette normale, qui peut se mettre sous la forme

$$(y' - y)dy' + (x' - x)dx' = 0,$$

et l'équation dont nous nous occupons se réduit à

$$\frac{dx'}{ds'}\,dy - \frac{dy'}{ds'}\,dx = 0, \qquad (d)$$

en supprimant le facteur T, qui ne peut être nul : on en tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}.$$

Ainsi l'équation (c) indique que la tangente à la *courbe des centres de gravité* doit être parallèle à la tangente à l'extrados.

Exprimons analytiquement la condition fournie par l'équation (d) : pour cela nous observerons que les différences des coordonnées des points de l'extrados et de la *courbe des centres de gravité* situés sur la même normale, ne sont autre chose que les projections sur les directions de ces coordonnées, de la distance $\frac{1}{2}e$ qui sépare le centre de gravité de l'extrados; nous aurons donc les relations

$$x - x' = -\tfrac{1}{2}e\sin\alpha,$$

$$y - y' = +\tfrac{1}{2}e\cos\alpha;$$

d'où, en différentiant,

$$dx = dx' - \tfrac{1}{2}e\cos\alpha\,d\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,de,$$

$$dy = dy' - \tfrac{1}{2}e\sin\alpha\,d\alpha + \tfrac{1}{2}\cos\alpha\,de.$$

Mettant ces valeurs de dx et dy dans l'équation (d), celle-ci devient

$$\tfrac{1}{2}e\left(\cos\alpha\frac{dy'}{ds'} - \sin\alpha\frac{dx'}{ds'}\right)d\alpha + \tfrac{1}{2}\left(\cos\alpha\frac{dx'}{ds'} + \sin\alpha\frac{dy'}{ds'}\right)de = 0.$$

Or le facteur de $d\alpha$ se réduit à zéro, et celui de de à $\frac{1}{2}$, à cause de $\frac{dy'}{ds'} = \sin\alpha$, et $\frac{dx'}{ds'} = \cos\alpha$; il en résulte

$$de = 0,$$

ou, en intégrant,

$$e = \text{constante}.$$

Telle est la condition exprimée finalement par l'équation des moments (*); nous en déduirons immédiatement une relation entre l'épaisseur variable ε et la quantité δ qui sépare le point milieu de l'épaisseur du voussoir de son centre de gravité; cette relation indiquée plus haut est

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon - \delta = \tfrac{1}{2}e,$$

d'où

$$\varepsilon = e + 2\delta, \qquad (e)$$

équation qui fixera la valeur de ε quand celle de δ aura été déterminée, et dans laquelle il est bien entendu que e désigne désormais une constante.

Les équations du problème se trouvent actuellement réduites au système des équations (b) et (e). Toutefois, dans le but de simplifier l'intégration des premières, nous allons former avec celles-ci un système de deux nouvelles équations propres à les remplacer, et que nous emploierons par la suite avec les équations (b). Écrivons ces équations sous la forme

$$d.\mathrm{T}\cos\alpha = -\mathrm{N}'\lambda\sin\alpha\, ds'$$

$$d.\mathrm{T}\sin\alpha = +\mathrm{N}'\lambda\cos\alpha\, ds' + d\mathrm{P}.$$

(*) Il eût été facile d'établir *a priori* cette condition, en observant que les plans de joint sont normaux à l'extrados, et que la courbe des centres de gravité est perpendiculaire aux plans de joint, ce qui établit le parallélisme de cette courbe et de l'extrados, et entraîne comme condition la constance de la quantité $\frac{1}{2}e$. De cette manière, les quatre forces qui sollicitent le voussoir élémentaire passent par un même point, le centre de gravité, et l'équation des moments est naturellement satisfaite. L'on eût pu ainsi poser immédiatement les équations (b) sans passer par les équations (a). Mais il nous a paru convenable de suivre, autant que possible, une méthode uniforme.

Multiplions, d'une part, la première par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$, et ajoutons; puis, d'autre part, multiplions la première par $\sin\alpha$ et la deuxième par $\cos\alpha$, et retranchons : nous aurons

$$\cos\alpha\, d.T\cos\alpha + \sin\alpha\, d.T\sin\alpha = \sin\alpha\, dP,$$
$$\cos\alpha\, d.T\sin\alpha - \sin\alpha\, d.T\cos\alpha = \cos\alpha\, dP + N'\lambda ds';$$

la différentiation donne d'ailleurs

$$d.T\cos\alpha = \cos\alpha\, dT - T\sin\alpha\, d\alpha,$$
$$d.T\sin\alpha = \sin\alpha\, dT + T\cos\alpha\, d\alpha.$$

Pour former avec ces valeurs celles des premiers membres des équations précédentes, il suffit de multiplier la première par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$, et d'ajouter; puis ensuite de multiplier la première par $\sin\alpha$, la deuxième par $\cos\alpha$, et de retrancher; on obtient ainsi immédiatement

$$dT = \sin\alpha\, dP,$$
$$T d\alpha = \cos\alpha\, dP + N'\lambda ds'.$$

Telles sont les combinaisons que nous nous proposions d'obtenir. On pourrait former immédiatement ces équations en égalant à zéro les sommes des projections des forces qui sollicitent un voussoir, sur deux axes, l'un tangent à l'extrados, l'autre normal à cette courbe. Il faudrait seulement faire attention à ce que, si l'on prend pour l'un des axes la normale menée par l'une des extrémités de l'élément ds', la projection de T sur la partie de cet axe dirigée vers le centre de courbure est nulle, et la projection de la force $(T + dT)$ sur la même partie s'obtient en multipliant par $\cos(90° + d\alpha)$ ou $-\sin d\alpha$; la composante a dès lors pour expression $-T d\alpha$, en négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs. Les autres composantes s'obtiendraient sans difficulté.

6. Nous allons maintenant nous occuper de déterminer la position des centres de gravité et le poids d'un voussoir élémentaire.



Considérons le voussoir compris entre deux plans normaux infiniment voisins, faisant entre eux l'angle $d\alpha$ des deux tangentes consécutives : décomposons la surface base du voussoir en tranches infiniment minces au moyen d'arcs de cercle de rayons variables r, décrits du centre de courbure; soit dr la largeur d'une de ces tranches, sa surface sera $r\,d\alpha\,dr$, et, si nous prenons les moments par rapport à une droite située dans le plan de la base, et passant par le centre de courbure, le moment élémentaire de la tranche aura pour expression $r^2 d\alpha\,dr$. En se rappelant que ρ' désigne le rayon de courbure de l'extrados, on aura, pour expression de la somme des moments élémentaires,

$$d\alpha \int_{\rho'-\varepsilon}^{\rho'} r^2 dr = \frac{1}{3}\left[\rho'^3 - (\rho'-\varepsilon)^3\right] d\alpha,$$

ou en réduisant,

$$\varepsilon\rho'^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{\varepsilon^2}{3\rho'^2}\right) d\alpha.$$

Soit d'une autre part dS la surface base du voussoir élémentaire, son expression est

$$dS = d\alpha \int_{\rho'-\varepsilon}^{\rho'} r\,dr = \frac{1}{2}\left[\rho'^2 - (\rho'-\varepsilon)^2\right] d\alpha = \varepsilon\rho'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right) d\alpha;$$

celle de la distance du centre de gravité au centre de courbure est d'ailleurs $\rho' - \left(\frac{1}{2}\varepsilon - \delta\right)$; il s'ensuit que le moment de la surface est

$$\varepsilon\rho'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right)\left(\rho' - \frac{1}{2}\varepsilon + \delta\right)d\alpha.$$

Égalant maintenant la somme des moments au moment de la somme, on aura, en supprimant les facteurs communs,

$$1 - \frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{\delta}{\rho'}\right);$$

on en tirera ensuite, en développant, réduisant et résolvant, la valeur suivante,

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\,\frac{\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'}}. \quad (*)$$

(*) Pour ceux des lecteurs qui connaitraient nos articles sur les voûtes insérés dans la *Revue de l'Architecture*, nous allons montrer que l'expression de δ donnée dans le premier article s'accorde exactement avec celle que nous venons de trouver, malgré la différence de forme que présentent les deux expressions.

La valeur de δ obtenue dans ce Recueil a été tirée de l'équation

$$(\rho - \delta)^2 - \rho(\rho - \delta) = -\frac{1}{12}\varepsilon^2,$$

qui donne

$$(\rho - \delta)(\rho - \delta - \rho) = -\frac{1}{12}\varepsilon^2,$$

d'ou

$$\delta = \frac{\frac{1}{12}\varepsilon^2}{\rho - \delta}.$$

Or la courbe des centres de gravité n'était point assujettie à être parallèle à l'extrados. Si nous joignons cette condition qui revient à

$$\rho' = \rho + \frac{1}{2}\varepsilon - \delta,$$

La quantité $\frac{\varepsilon}{\rho'}$ étant toujours une petite fraction, on est en droit de développer le deuxième membre de l'équation précédente, suivant les puissances de cette quantité, ce qui donne

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2} + \text{etc.}\right);$$

mais, par la suite, nous nous contenterons d'avoir égard aux termes du premier et du deuxième ordre de petitesse, en regardant le rapport $\frac{\varepsilon}{\rho'}$ comme étant du premier, ce qui réduira la valeur de $\frac{\delta}{\rho'}$ à

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2}, \qquad (g)$$

et nous dirons que cette quantité est du deuxième ordre.

Quant au poids du voussoir, son expression sera

$$dP = \varpi\lambda dS = \varpi\lambda\varepsilon\rho'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right) d\alpha,$$

ou bien

$$dP = \varpi\lambda\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right) ds'.$$

Cette expression et la précédente (g) ont lieu indépendamment de toute condition tirée des équations de l'équilibre; nous allons

d'où

$$\rho - \delta = \rho' - \frac{1}{2}\varepsilon,$$

l'expression précédente deviendra

$$\delta = \frac{\frac{1}{12}\varepsilon^2}{\rho' - \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Or cette relation est identique avec celle que nous venons d'obtenir dans le mémoire actuel.

les combiner avec l'équation (e), de manière à en déduire de nouvelles valeurs qui satisfassent à cette équation. Substituons dans l'équation (g) la valeur (e) de ε bornée à son premier terme, puisque nous négligeons les termes d'ordre supérieur au deuxième; il viendra d'abord

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\,\frac{e^2}{\rho'^2}; \qquad (h)$$

puis ensuite, mettant cette valeur dans l'équation (e), on aura

$$\varepsilon = e\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{e}{\rho'}\right). \qquad (i)$$

Pour former avec cette valeur celle de dP, on peut remplacer par e l'ε qui entre dans la parenthèse du deuxième membre, car cette parenthèse étant multipliée par ε en dehors, il n'en résultera qu'une erreur du troisième ordre : on aura ainsi

$$dP = \varpi\lambda e\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{e}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{e}{\rho'}\right) ds';$$

puis, en effectuant le produit des parenthèses, et y négligeant les termes du deuxième ordre, de manière à ne négliger finalement que ceux du troisième,

$$dP = \varpi\lambda e\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{e}{\rho'}\right) ds'. \qquad (j)$$

Maintenant, les valeurs de ε et de $\frac{dP}{ds'}$ ne se trouvent dépendre que du rayon de courbure.

Il reste à substituer cette valeur de dP dans les équations (b) et (f); nous allons le faire, et en même temps y remplacer la résultante T par son expression $\lambda e\mu\varpi$, dans laquelle λe est l'étendue de la surface du joint, et μ la hauteur du prisme dont le poids produirait la pression T sur la surface λe, si elle était horizontale. Disons, en passant, que l'usage de la hauteur μ est ici le même que celui des hauteurs manométriques dans la mécanique

des fluides; il a, comme ces dernières, l'avantage de rendre plus saisissable pour l'esprit l'intensité des pressions, que tel ou tel nombre de kilogrammes par mètre carré : il sert, d'un autre côté, à mettre en évidence l'homogénéité des différents termes des équations, de telle sorte qu'il n'y entre plus que des lignes et des rapports numériques. Ces considérations nous ont décidé à remplacer partout les pressions par unité de surface, au moyen des hauteurs qui les représentent; les premières, que nous avons désignées par t, sont d'ailleurs liées à celles-ci par la relation

$$t = \varpi\mu. \tag{k}$$

Nous écrirons donc

$$\mathrm{T} = \varpi\lambda e\mu, \quad d\mathrm{T} = \varpi\lambda e d\mu.$$

Ces valeurs et celle (j) de dP étant portées dans les équations (b) et (f), on aura, en divisant ensuite par $\varpi\lambda e$,

$$\left.\begin{aligned} d.\mu\cos\alpha &= -\frac{\mathrm{N}'}{\varpi e}\,dy', \\ d.\mu\sin\alpha &= +\frac{\mathrm{N}'}{\varpi e}\,dx' + \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)ds', \\ d\mu &= \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)\sin\alpha\,ds', \\ \mu d\alpha &= \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)\cos\alpha\,ds' + \frac{\mathrm{N}'}{\varpi e}\,ds'. \end{aligned}\right\} \tag{l}$$

Les deux premières de ces équations ne peuvent être intégrées sans que l'on se donne l'expression de la variable N' en fonction de l'une des coordonnées; les deux dernières, au contraire, quoiqu'elles n'en soient que des combinaisons, conduisent facilement aux valeurs de μ et du rayon de courbure ρ', quel que soit N'. En effet, à cause de $\sin\alpha\,ds' = dy'$ et $\frac{ds'}{\rho'} = d\alpha$, on peut mettre la troisième équation (l) sous la forme

$$d\mu = dy' - \frac{1}{3}\,e\sin\alpha\,d\alpha;$$

or cette équation s'intègre immédiatement, et si l'on désigne par μ_0 et h les valeurs de μ et y' qui ont lieu pour $\alpha = 0$, on aura, en intégrant à partir de ces limites,

$$\mu - \mu_0 = y' - h - \frac{1}{3} e (1 - \cos\alpha). \qquad (m)$$

D'autre part, substituons la valeur de μ tirée de cette équation, dans la dernière équation (l) divisée par $d\alpha$, et observons que $\frac{ds'}{d\alpha} = \rho'$, nous aurons

$$\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3} e (1 - \cos\alpha) = \left(\rho' - \frac{1}{3} e\right) \cos\alpha + \frac{N'}{\varpi e} \rho';$$

tirant ensuite la valeur de ρ', il viendra

$$\rho' = e \, \frac{\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3} e (1 - 2\cos\alpha)}{\frac{N'}{\varpi} + e \cos\alpha}. \qquad (n)$$

Les équations (m) et (n) sont équivalentes aux deux premières équations (l), et pour pouvoir faire usage des unes et des autres, il devient indispensable de préciser la valeur de N' en fonction des coordonnées; c'est ce que nous allons essayer de faire en examinant les diverses manières dont les charges que supporte la voûte peuvent agir sur les voussoirs.

INDÉTERMINATION DE L'ACTION DES CHARGES SUR LES REINS DES VOÛTES DANS LES ARCHES DE PONT.

7. Nous ne nous occuperons point dans ce Mémoire des arches dans lesquelles les plans de joint s'étendent jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados. Dans les autres cas, on distinguera l'action exercée sur la voûte par la construction en assises horizontales qui forme les parements extérieurs, et celle que produit la masse, plus ou moins irrégulièrement disposée, des matériaux qui remplissent l'espace intermédiaire.

La disposition irrégulière des matériaux d'un massif formé par un blocage de maçonnerie ou composé de parties semi-fluides,

tel qu'un massif de terre ou de béton, rend tout à fait impossible la détermination de leur action sur la voûte. Tout ce que l'on pourrait faire de mieux à cet égard serait de recourir au calcul des probabilités pour découvrir le mode d'action le plus probable de cette partie du massif.

Nous allons voir que la disposition presque régulière de la construction par assises horizontales présente autant de difficultés.

La répartition de la charge sur les différents voussoirs dépend, dans ce cas, de la pose des assises horizontales dont les extrémités s'appuient sûr les reins de la voûte, et des tassements qui se produisent pendant la construction et après le décintrement. Les effets qui se produisent pendant la pose, et le tassement, dépendent essentiellement du soin qu'apportent les ouvriers pendant la construction, et de la nature des matériaux employés : de là nait l'impossibilité de tenir compte, dans le calcul, de circonstances si variables et si difficiles à apprécier. C'est à cette variation que tient l'indétermination des actions exercées par les assises horizontales sur les voussoirs des plans de tête. Pour bien nous rendre compte des effets de la pose des assises horizontales, il nous suffira d'examiner les cas extrêmes qu'elle peut présenter.

Le plus souvent, dans les constructions de voûtes chargées, les voussoirs des plans de tête ne se terminent point vers l'extradòs par une surface cylindrique ayant cette courbe pour directrice, mais bien par deux surfaces planes, l'une horizontale et passant par l'arête supérieure du voussoir, l'autre verticale et passant par l'arête inférieure située sur l'extrados. Au moyen de cette disposition *en gradins*, on met de niveau les faces horizontales des voussoirs avec celles des assises de maçonnerie qui forment les parements extérieurs de la construction.

Nous examinerons diverses circonstances de la pose des assises, dans cette disposition par rapport aux voussoirs. Il est facile de voir que les faces verticales des assises peuvent être plus ou moins serrées, et même que la face verticale de contact d'une assise avec le voussoir peut ne supporter aucune pression, soit

pendant la pose, soit après que le tassement a été produit; cela dépendra principalement de la pose de l'assise considérée et de celle des assises voisines. Il pourra donc y avoir un plus ou moins grand nombre de voussoirs dont les têtes ne recevront des assises adjacentes aucune pression horizontale; de même que pour d'autres voussoirs, ces pressions pourront aussi être plus ou moins considérables. D'un autre côté, la pression verticale qu'une pierre appartenant à une assise exercera sur la face horizontale de la tête du voussoir correspondant à l'assise inférieure, dépendra de plusieurs circonstances, telles que l'exécution plus ou moins parfaite des surfaces de joint, et la longueur de la partie de la pierre considérée engagée entre les assises supérieure et inférieure, du côté opposé à la tête du voussoir : on conçoit encore une exécution ou une pose assez imparfaites, pour que quelques-unes des faces horizontales de joint communes à l'assise et au voussoir inférieur ne supportent aucune pression; de même aussi, il pourra arriver que ces pressions soient très-grandes, comme dans le cas où la pierre dont il s'agit aurait une plus grande épaisseur vers la tête du voussoir que vers le côté opposé (*). Il est permis encore de se

(*) Ayant bien saisi ces particularités, on s'expliquera aisément les ruptures que présentent parfois les voussoirs dans une direction perpendiculaire à celle des plans de joint, et vers le tiers ou la moitié de leur longueur à partir de l'intrados. Lorsque les résultantes des pressions sur les plans de joint des voussoirs passent

représenter un cas dans lequel les pressions horizontales et verticales transmises par les assises aux têtes des voussoirs seraient nulles en même temps : ce serait celui où le système des assises horizontales se tiendrait de lui-même en équilibre, comme dans les constructions égyptiennes; la voûte serait simplement touchée, sans être pressée par ces assises, et ne serait d'aucune utilité dans la construction, de telle sorte qu'on pourrait la supprimer, et qu'elle devrait se tenir en équilibre d'elle-même si l'on voulait la conserver.

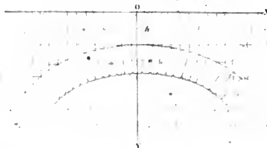
De ce qui précède, il faut conclure qu'il est impossible d'assigner aucune valeur déterminée aux composantes horizontale et verticale de l'action exercée par les parties du massif sur chaque voussoir; il est donc également impossible de les soumettre à aucun calcul précis. Nous serons obligé, pour lever la difficulté qui résulte de cette indétermination, de procéder à l'égard du massif comme nous l'avons fait pour la voûte; nous lui substituerons une disposition idéale donnant lieu à des pressions normales déterminées : il y aura ensuite à examiner s'il est convenable de passer, sans modifier le jeu des forces, du système idéal dont il s'agit, à telle disposition des matériaux que l'on se proposera de réaliser.

---

près de l'intrados, les joints s'ouvrent vers l'extrados, d'une quantité plus ou moins appréciable à l'œil. Le voussoir est alors dans le cas d'un solide encastré vers l'une de ses extrémités, et sollicité à l'autre par une force non dirigée dans le sens de sa longueur. Cette force est ici la résultante des pressions horizontales et verticales exercées par les assises contiguës; il y a possibilité de rupture dès que cette résultante prend une direction oblique par rapport à la longueur du voussoir. La rupture tend à se produire le plus près possible de la section d'encastrement ou de la courbe de la résultante des pressions; et elle y est facilitée, non-seulement parce que le moment de la force qui produit la rupture va en croissant vers ce point, tandis que le moment des résistances à la rupture décroît avec la section du voussoir, mais encore parce que la pression totale exercée par les voussoirs adjacents se trouve concentrée dans le voisinage de cette section, et qu'il en résulte en ces points une désagrégation de la matière du voussoir, qui n'attend pour se manifester que le concours d'une nouvelle force. Ces considérations indiquent l'importance qu'il peut y avoir à assurer la direction normale de l'action de la charge sur les voussoirs.

DISPOSITION DE LA CHARGE EXTÉRIEURE D'UNE ARCHE, DONNANT LIEU À DES PRESSIONS NORMALES DÉTERMINÉES.

8. Dans le but d'abréger les descriptions, disons comment on pourra passer de la disposition *en gradins* dont il a été question dans le numéro précédent, à la disposition idéale que nous nous proposons d'étudier. Supposons d'abord, dans la première, la division de la voûte en voussoirs effectuée au moyen de plans normaux infiniment rapprochés : les deux faces de la tête de chaque



voussoir qui déterminent les gradins seront infiniment étroites; imaginons actuellement qu'on sépare le corps et la tête des voussoirs suivant la surface extrados, c'est-à-dire suivant la surface qui passe par les arêtes extérieures des plans de joint normaux; on aura isolé de chaque voussoir un prisme triangulaire ayant pour base un triangle rectangle de côtés infiniment petits, et dont l'hypoténuse répond à la face de contact de ce prisme et du voussoir. Substituons enfin aux assises horizontales de la disposition ci-dessus, une série de prismes verticaux ayant pour bases les faces horizontales des prismes triangulaires que nous venons de définir, et limités, dans le sens vertical, par un même plan horizontal dont le niveau ne soit pas inférieur à celui du point le plus

élevé de l'extrados. On obtiendra de cette manière une disposition dans laquelle chaque voussoir se trouve accompagné d'un prisme triangulaire et d'un prisme quadrangulaire, et telle que les actions exercées par le massif sur les voussoirs seront normales à l'extrados et déterminées.

En effet, dans le système que nous examinons, la force qu'un voussoir reçoit du massif est la pression normale exercée par la face du prisme triangulaire par laquelle il est en contact avec lui, en faisant toutefois abstraction du frottement : mais on pourrait dire que cette force ne se développe pas, si l'on admettait que la face hypoténuse et la face verticale du prisme triangulaire fussent en contact parfait au moment de la pose, l'une avec le voussoir, l'autre avec le prisme quadrangulaire adjacent; du moins, il n'aurait lieu qu'en vertu de la compressibilité de la matière du prisme, qui lui permettrait de descendre un tant soit peu sous l'influence du poids du prisme superposé et du glissement occasionné par l'inflexion de la voûte. Nous négligerons donc ici le frottement, ce qui revient à supposer normale l'action du prisme sur le voussoir. Déterminons maintenant l'intensité de cette action; pour cela, nous aurons à considérer l'équilibre du prisme triangulaire.

Afin de simplifier les notations, nous placerons l'axe des x dans le plan horizontal qui limite les prismes quadrangulaires à leur partie supérieure.

Les forces que reçoit le prisme triangulaire sont au nombre de quatre : ce sont les trois pressions exercées perpendiculairement sur ses trois faces longitudinales, et le poids de ce prisme; nous devons faire abstraction de ce poids, qui est une force infiniment petite du deuxième ordre à cause des deux dimensions infiniment petites du prisme, et ne doit point, pour cette raison, figurer dans des équations entre les autres forces qui sont infiniment petites du premier ordre.

Soit ds' le côté hypoténuse de la base du prisme triangulaire, les côtés horizontal et vertical de cette base seront dx' et dy'; les étendues superficielles des faces correspondantes seront respecti-

vement $\lambda ds'$, $\lambda dx'$ et $\lambda dy'$. N' désignant comme ci-dessus l'intensité de la pression normale par unité de surface, l'intensité de la pression exercée par le voussoir sur le prisme sera $N'\lambda ds'$, et comme cette force est dirigée du centre de courbure vers l'extrados, ses composantes horizontale et verticale seront $N'\lambda ds' \sin\alpha$ et $-N'\lambda ds' \cos\alpha$.

Soit H' la pression horizontale par unité de surface exercée par le prisme triangulaire sur la partie adjacente du massif, et que, réciproquement, celle-ci exerce sur la face verticale du précédent; la force exercée contre le prisme par la partie adjacente du massif sera $H'\lambda dy'$, et dirigée vers les x négatifs, la convexité de l'élément ds' étant supposée du côté des x positifs.

Enfin, la face horizontale du prisme triangulaire reçoit une force verticale qui n'est autre chose que le poids du prisme quadrangulaire correspondant, ou $i\varpi y'\lambda dx'$, en désignant par i le rapport de la densité du massif à celle de la voûte, de sorte que $i\varpi$ représente le poids de l'unité de volume du massif, ainsi que nous l'avons dit plus haut.

Égalons à zéro les sommes des projections horizontales et verticales des forces qui sollicitent le prisme triangulaire; nous aurons

$$N'\lambda ds' \sin\alpha - H'\lambda dy' = 0; \quad -N'\lambda ds' \cos\alpha + i\varpi y'\lambda dx' = 0,$$

ou bien

$$N' = H', \quad N' = i\varpi y';$$

ou encore

$$N' = H' = i\varpi y'. \qquad (o)$$

La pression normale N' par unité de surface se trouve ainsi déterminée; et de ce que cette pression et la pression H' ont pour valeur commune la quantité $i\varpi y'$, on en conclut que le mode de disposition des matériaux du massif dont nous nous occupons ici, donne lieu à la même distribution des pressions, que si le massif était un liquide de densité correspondante au poids $i\varpi$ de l'unité de volume.

Nous aurions pu, comme plusieurs auteurs, partir immédiatement de l'hypothèse de la fluidité; mais il nous a paru bon d'indiquer à quel mode de disposition répond cette hypothèse que nous allons adopter dans ce qui va suivre. Nous signalerons à ce sujet la tendance d'un bon nombre d'ingénieurs à remplacer généralement la disposition *en gradins* des parements extérieurs par celle résultant d'un *extrados* continu, avec assises horizontales coupées obliquement en leur intersection avec l'extrados. Cette disposition de l'appareil des têtes peut donner lieu à des pressions normales, mais leurs intensités restent indéterminées; il ne faudrait que séparer les prismes triangulaires, des assises horizontales, pour diminuer notablement l'indétermination et se rapprocher de notre disposition idéale : si l'on avait à redouter la rupture de ces prismes en leurs angles aigus, on pourrait les construire d'une matière plus résistante, et même, dans certains cas, les rattacher aux pierres supérieures, c'est-à-dire les faire alors de la même pièce que celles-ci.

On dira peut-être que, si l'on applique aux appareils consistant en assises horizontales et voussoirs *en gradins* les formules relatives à l'équilibre du système formé de prismes disposés verticalement et reposant sur des prismes triangulaires détachés des voussoirs, ou celles relatives à l'hypothèse de la fluidité des matières du massif, on ne courra aucun risque relativement à la stabilité de la construction proposée, puisque celle-ci donne lieu à des liaisons résultant du croisement des pierres des assises horizontales, que ne présente pas la disposition du massif en prismes verticaux, et que, d'autre part, le passage de l'état fluide à l'état solide établit des liaisons favorables à la stabilité, et sur lesquelles on n'a pas compté. Nous n'invoquerons point ces raisonnements, qui sont plus spécieux qu'exacts, attendu que les liaisons établies dans la construction ont pour résultat précisément d'empêcher les charges de se répartir sur les reins de voûte, comme elles le feraient si ces liaisons manquaient absolument, ou dans le cas de la fluidité.

Nous avons indiqué, dans la note du n° 7, la nécessité d'assu-

rer la direction normale des pressions exercées par le massif; nous croyons donc ne pouvoir mieux faire, et sur ce point nous sommes d'accord avec de savants ingénieurs, qu'en adoptant l'hypothèse de la fluidité, et en engageant les constructeurs à se conformer, dans l'appareillage des parements extérieurs, aux conséquences de cette hypothèse, par l'adoption de dispositions propres à la réaliser, ou à en choisir qui se rapprochent le plus possible de celle que nous avons décrite, et que nous allons soumettre au calcul.

APPLICATION DES FORMULES DE L'ÉQUILIBRE AU CAS OÙ LES PRESSIONS NORMALES EXTÉRIEURES AUX VOUSSOIRS SONT PROPORTIONNELLES À LA HAUTEUR DE LA CHARGE QUI S'ÉLÈVE AU-DESSUS DE CEUX-CI.

9. Nous partirons de la valeur de N' obtenue dans le numéro précédent, et qui donne

$$\frac{N'}{\varpi} = iy'.$$

En substituant cette valeur dans les deux premières équations (l), on a

$$d.\mu\cos\alpha = -\frac{iy'}{e}\,dy',$$

$$d.\mu\sin\alpha = +\frac{iy'}{e}\,dx' + \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)ds'.$$

Quant à l'équation (m), elle reste la même,

$$\mu - \mu_0 = y' - h - \frac{1}{3}e(1 - \cos\alpha),$$

et l'équation (n) devient

$$\rho' = e\,\frac{\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3}e(1 - 2\cos\alpha)}{iy' + e\cos\alpha}. \qquad (p)$$

Cette expression du rayon de courbure de l'extrados offre un moyen très-simple de construire cette courbe : nous reviendrons

plus tard sur ce sujet. Nous allons maintenant nous occuper de l'intégration des équations différentielles ci-dessus, ou mieux de la première d'entre elles, comme plus simple, ce qui suffira, puisque la valeur de μ résulte d'une intégration effectuée précédemment.

On obtient immédiatement, en intégrant la première de ces équations, à partir des limites μ_0, 1 et h relatives à μ, $\cos\alpha$ et y',

$$\mu_0 - \mu \cos\alpha = \frac{i}{2e} (y'^2 - h^2):$$

pour éliminer μ, multiplions par $\cos\alpha$ l'équation qui donne la valeur de $\mu - \mu_0$, et ajoutons membre à membre avec celle-ci; il viendra

$$u_0 (1 - \cos\alpha) = (y' - h)\cos\alpha - \frac{1}{3} e (1 - \cos\alpha)\cos\alpha + \frac{i}{2e}(y'^2 - h^2). \quad (q)$$

En exprimant dans cette équation $\cos\alpha$ en fonction de $\tang\alpha$ dont la valeur est $\frac{dy'}{dx'}$, on aurait l'équation différentielle de la courbe extrados, qui semble présenter, pour l'intégration, plus de facilité que l'équation différentielle de l'intrados; mais il convient mieux d'obtenir l'équation de l'intrados (*), et dans ce but nous ne nous laisserons point arrêter par des difficultés qui sont plutôt apparentes que réelles.

Pour passer de l'équation (q) à celle relative à l'intrados, il suffit de remplacer y' par sa valeur en fonction de y''; en effet, $\cos\alpha$ conserve la même valeur pour les points des trois courbes situés sur une même normale à l'extrados, ces courbes étant parallèles en vertu de la constance de $\frac{1}{2}e$. Or les coordonnées y' et y'' ne diffèrent que d'une quantité égale à la projection verticale de e; on a donc

$$y' = y'' - e \cos\alpha:$$

(*) Nous voulons parler ici de l'*intrados fictif*, que nous désignerons simplement par la dénomination d'intrados, à moins que nous ne prévenions du contraire.

nous déduirons de cette équation la valeur initiale de y'', en faisant à la fois $y' = h$ et $\alpha = 0$; soit h'' cette valeur de y'', il vient

$$h = h'' - e, \qquad (r)$$

équation qui, combinée avec la précédente par voie d'addition et de soustraction, donne

$$y' + h = y'' + h'' - e\,(1 + \cos\alpha),$$
$$y' - h = y'' - h'' + e\,(1 - \cos\alpha);$$

multipliant celles-ci membre à membre, il vient

$$y'^2 - h^2 = y''^2 - h''^2 - 2\,e\,(y''\cos\alpha - h'') - e^2\,(1 - \cos^2\alpha):$$

substituant, enfin, cette valeur et la précédente dans l'équation (q), nous aurons

$$\mu_0\,(1 - \cos\alpha) = (y'' - h'')\cos\alpha + \frac{2}{3}\,e\,(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$$
$$+ \frac{i}{2e}\,(y''^2 - h''^2) - i\,(y''\cos\alpha - h'') - \frac{ie}{2}\,(1 - \cos^2\alpha).$$

C'est ici le lieu de remarquer que si l'on considère la quantité e comme étant du premier ordre de petitesse par rapport aux rayons de courbure, ou aux coordonnées que l'on suppose de même ordre, la quantité μ_0 est du premier ordre de grandeur par rapport à ces dernières : en effet, le deuxième membre de cette équation ne contient que deux termes ayant e en dénominateur, et qui sont pour cela du premier ordre de grandeur, réunis sous la forme $\frac{i}{2e}\,(y''^2 - h''^2)$; la différence de ces termes reste en général d'un ordre de grandeur supérieur à celui des coordonnées, puisque le facteur de cette différence $y'' - h''$ est en général d'un ordre de grandeur plus élevé que e : il faut donc que le deuxième membre, et par suite le premier, soient du premier ordre de grandeur, généralement. On observera que si, vers le sommet de

l'intrados, $y'' - h''$ devient très-petit et même nul, le facteur $1 - \cos\alpha$ devient nul en même temps, et l'ordre de μ_0 reste indéterminé vers le sommet, d'après l'équation précédente; mais l'expression (p) de ρ' montre que le produit de e par μ_0 est constamment égal au produit de quantités de l'ordre des coordonnées. Nous sommes donc autorisé à regarder μ_0 comme étant du premier ordre de grandeur.

Posons, pour abréger et simplifier les discussions,

$$q^2 = \frac{2e\mu_0}{i}; \qquad (s)$$

la quantité q sera, d'après ce qui vient d'être dit, de l'ordre de grandeur des coordonnées et des rayons de courbure. Multiplions l'équation ci-dessus par $\frac{1}{\mu_0}$ ou par sa valeur $\frac{2e}{iq^2}$, il viendra

$$1 - \cos\alpha = \frac{y''^2 - h''^2}{q^2} + \frac{2e}{iq^2}(y'' - h'')\cos\alpha + \frac{4e^2}{3iq^2}(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$$
$$- \frac{2e}{q^2}(y''\cos\alpha - h'') - \frac{e^2}{q^2}(1 - \cos^2\alpha).$$

Cette équation est du deuxième degré par rapport à $\cos\alpha$; mais observons que $\cos^2\alpha$ n'affecte que des termes du deuxième ordre, de sorte que si, comme nous sommes convenu de le faire, nous négligeons ceux du troisième, il suffira ici d'y substituer à $\cos\alpha$ et à $1 - \cos\alpha$, leurs valeurs obtenues en négligeant ceux du premier. Or la valeur de $1 - \cos\alpha$ est $\frac{y''^2 - h''^2}{q^2}$ aux termes près du premier ordre, d'après l'équation précédente; d'où résulte pour la valeur de $\cos\alpha$, au même degré d'approximation, $1 - \frac{y''^2 - h''^2}{q^2}$: nous pourrons donc, en ne négligeant que les termes du troisième ordre, mettre le troisième terme du second membre sous la forme

$$\frac{4e^2}{3iq^2}\,\frac{y''^2 - h''^2}{q^2}\cos\alpha,$$

et écrire le dernier terme de ce membre ainsi qu'il suit :

$$-\frac{e^2}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}\left(1-\frac{y'^2-h'^2}{q^2}\right)\cos\alpha.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation précédente deviendra

$$1-\cos\alpha=\frac{y''^2-h''^2+2h''e-e^2}{q^2}+\left[\frac{2e}{iq^2}(y''-h'')-\frac{2e}{q^2}y''\right.$$
$$\left.+\frac{4e^2}{3iq^2}\frac{y''^2-h''^2}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}-\frac{e^2}{q^2}\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right]\cos\alpha;$$

on en déduit

$$\cos\alpha\left\{1+\frac{2e}{iq^2}(y''-h'')-\frac{2e}{q^2}y''+\frac{e^2}{q^2}+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right\}$$
$$=1-\frac{y''^2-h''^2+2h''e-e^2}{q^2}, \quad (t)$$

ou bien en ajoutant et retranchant $\frac{2e}{q^2}h''$ dans la parenthèse du premier membre, et tirant la valeur de $\cos\alpha$,

$$\cos\alpha=\frac{1-\dfrac{y''^2-h''^2+e(2h''-e)}{q^2}}{1-\dfrac{e(2h''-e)}{q^2}+\dfrac{2e}{iq^2}(1-i)(y''-h'')+\dfrac{e^2}{iq^2}\left(\dfrac{4}{3}-i\right)\dfrac{y''^2-h''^2}{q^2}}. \quad (u)$$

Telle est l'équation différentielle de l'intrados qu'il reste à intégrer, en y supposant $\cos\alpha$ exprimé en fonction de $\tang\alpha$ ou de $\frac{dy''}{dx''}$.

10. Avant de procéder à l'intégration de cette équation, nous aurons à exprimer les quantités μ et ρ'', puis ensuite ε ou δ, en fonction des ordonnées de l'intrados.

L'équation (m) donne immédiatement, au moyen de la valeur ci-dessus de $y'-h$,

$$\mu-\mu_0=y''-h''+\frac{2}{3}e(1-\cos\alpha);$$

et, si l'on observe que e est du deuxième ordre par rapport à μ,

on aura une expression de μ exacte jusque dans les termes du deuxième ordre relativement à cette quantité, en mettant à la place du facteur $1 - \cos\alpha$ la valeur obtenue plus haut en négligeant les termes du premier ordre; le dernier terme du second membre de l'équation précédente pourra s'écrire $\frac{2}{3} e \frac{y''^2 - h''^2}{q^2}$, ou, en vertu de l'équation (s), $\frac{i}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2)$: il vient donc

$$\mu - \mu_0 = y'' - h'' + \frac{i}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2). \qquad (v)$$

Quant à l'expression du rayon de courbure, observons qu'en vertu du parallélisme des trois courbes, on a

$$\rho' = \rho'' + e;$$

substituant cette valeur et celle de y' dans l'équation (p) dont nous chasserons les dénominateurs, nous aurons

$$(\rho'' + e)[iy'' + (1 - i)e\cos\alpha] = e\mu_0 + e(y'' - h'') + e^2(1 - \cos\alpha) - \frac{2}{3}e^2(1 - 2\cos\alpha);$$

divisant tout par i, et ayant égard à la relation (s), puis effectuant les réductions qui se présentent, il viendra d'abord

$$\rho''\left(y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right) + ey'' + \frac{1-i}{i}e^2\cos\alpha = \frac{q^2}{2} + \frac{e}{i}(y'' - h'') + \frac{2}{3}\frac{e^2}{i}(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{3i}e^2\cos\alpha,$$

puis ensuite

$$\rho''\left(y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}q^2 - eh'' + \frac{2}{3}\frac{e^2}{i} + \frac{1-i}{i}e(y'' - h'') - \frac{1}{i}\left(\frac{4}{3} - i\right)e^2\cos\alpha,$$

et enfin

$$\rho'' = \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh'' + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i} + 2\frac{1-i}{i}e(y'' - h'') - \frac{2}{i}\left(\frac{4}{3} - i\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha}. \qquad (w)$$

Nous reviendrons plus loin sur cette expression du rayon de courbure, et nous indiquerons le parti qu'on en peut tirer pour substituer à l'emploi de l'intégrale de l'équation (u), celui des constructions graphiques. Actuellement, nous nous bornerons à opérer la vérification de cette expression, en observant qu'on doit pouvoir la tirer de l'équation (u) par la différentiation.

En effet, différentions cette équation en y faisant préalablement disparaître le dénominateur du deuxième membre, il viendra

$$-\left[1-\frac{e(2h''-e)}{q^2}+\frac{2e}{iq^2}(1-i)(y''-h'')+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right]\sin\alpha\, d\alpha$$
$$+\cos\alpha\left[\frac{2e}{iq^2}(1-i)+\frac{2e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''}{q^2}\right]dy''=-\frac{2y''}{q^2}dy''.$$

Or, on a $dy''=\sin\alpha\, ds''=\rho''\sin\alpha\, d\alpha$; substituant cette dernière valeur à la place de dy'', et supprimant ensuite le facteur commun $\sin\alpha\, d\alpha$, on aura

$$\frac{2}{q^2}\rho''\left[y''+\frac{1-i}{i}e\cos\alpha+\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''}{q^2}\cos\alpha\right]=1-\frac{2eh''}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}$$
$$+\frac{2(1-i)}{i}\frac{e(y''-h'')}{q^2}+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}.$$

Nous pouvons mettre dans le dernier terme du second nombre au lieu de $\frac{y''^2-h''^2}{q^2}$, la quantité $1-\cos\alpha$, d'après ce qui a été dit ci-dessus; puis, en transposant le dernier terme de la parenthèse du premier membre, et multipliant par q^2, nous aurons

$$2\rho''\left[y''+\frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right]=q^2-2eh''+e^2+\frac{2(1-i)}{i}e(y''-h'')$$
$$+\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)(1-\cos\alpha)-\frac{2e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{\rho''y''}{q^2}\cos\alpha.$$

Or le dernier terme du second membre étant du deuxième

ordre, on peut mettre à la place de ρ'', sa valeur obtenue en négligeant les termes du premier, et l'équation donne ici $2\rho'' y'' = q^2$, en négligeant ces termes; il en résulte que le dernier se réduit à $-\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\cos\alpha$, et, par suite, la somme des deux derniers à $\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)-\frac{2e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\cos\alpha$. Mettant ces valeurs, achevant la réduction des termes en e^2, puis tirant la valeur de ρ'', il vient

$$\rho'' = \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh'' + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i} + 2\,\frac{1-i}{i}\,e\,(y''-h'') - \frac{2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}\,e\cos\alpha},$$

valeur identique avec celle obtenue précédemment.

Nous pouvons déjà remarquer que, dans l'hypothèse $i = 1$, cette expression devient plus simple que celle (p) du rayon de courbure de l'extrados. On pourra encore observer que, dans la même hypothèse, le second membre de l'équation (a) ne contient que des puissances paires de y'', d'où il est facile de conclure que la courbe qu'elle représente devient alors symétrique par rapport à l'axe des x. Le numérateur de la valeur de ρ'' conserve le même signe pour des valeurs égales et de signe contraire de y'', tandis que le dénominateur change de signe. Le rayon de courbure prend alors des valeurs égales et de signe contraire, comme cela doit être, puisque les courbures en deux points symétriquement placés par rapport à l'axe des x sont nécessairement de sens contraires.

Actuellement la détermination de la distance δ du centre de gravité au milieu de l'épaisseur du voussoir devient très-simple: en effet, nous déduisons de l'équation (h)

$$\delta = \frac{1}{12}\,\frac{e^2}{\rho'};$$

on peut substituer ici ρ'' à la place de ρ', puisque leur différence est égale à e, et qu'il n'en peut résulter qu'une erreur du troisième ordre que nous négligeons; de plus, on peut à ρ'' substi-

tuer sa valeur, en y négligeant les termes du premier ordre, laquelle se réduit à $\frac{q^2}{2y''}$; alors il vient simplement

$$\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{q^2}y'' = \frac{i}{12}\frac{e}{\mu_0}y'', \qquad (x)$$

en ayant égard à la relation (s).

L'expression (i) de l'épaisseur variable ε se change de même en

$$\varepsilon = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'' = e + \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_0}y''. \qquad (y)$$

Dans le système que nous considérons, les épaisseurs croissent donc proportionnellement aux ordonnées de l'intrados, et la constante e est l'épaisseur qui aurait lieu au point où l'intrados couperait l'axe des x si cette intersection était possible.

DEVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'INTRADOS.

11. Nous avons à former l'expression du coefficient différentiel $\frac{dy''}{dx''}$, dont la valeur en fonction de $\cos\alpha$ est

$$\frac{dy''}{dx''} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}:$$

on a d'abord, en renversant les deux membres de l'équation (u),

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1 - \frac{e(2h'' - e)}{q^2} + \frac{2(1-i)}{i}\frac{e(y'' - h'')}{q^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{1}{3} - i\right)\frac{e^2(y''^2 - h''^2)}{q^4}}{1 - \frac{y''^2 - h''^2 + e(2h'' - e)}{q^2}};$$

élevant au carré les deux membres de cette équation, retranchant l'unité, et réduisant ensuite au même dénominateur, on aura, en supprimant les termes qui se détruisent, et négligeant ceux du troisième ordre,

$$\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \text{ ou } \frac{dy''^2}{dx''^2} = \frac{1}{\left[1 - \frac{y''^2 - (h'' - e)^2}{q^2}\right]^2} \left\{ 2\,\frac{y''^2 - h''^2}{q^2} - \frac{(y''^2 - h''^2)^2}{q^4} \right.$$

$$+ \frac{4(1-i)}{i}\,\frac{e(y''-h'')}{q^2} - \frac{4\,e\,h''\,(y''^2 - h''^2)}{q^4}$$

$$\left. + \frac{8}{3i}\,\frac{e^2(y''^2 - h''^2)}{q^4} - \frac{8(1-i)}{i}\,\frac{e^2 h''(y'' - h'')}{q^4} + \frac{4(1-i)^2}{i^2}\,\frac{e^2(y'' - h'')^2}{q^4} \right\}.$$

Multipliant haut et bas par q^4 et mettant le facteur commun $y'' - h''$ en évidence, si, de plus, on pose

$$R^2 = (y'' - h'') \Big\{ [2q^2 - (y''^2 - h''^2)](y'' + h'') + 4\,\frac{1-i}{i}\,eq^2$$

$$- 4\,eh''(y'' + h'') + \frac{8}{3i}\,e^2(y'' + h'')$$

$$- 8\,\frac{1-i}{i}\,e^2 h'' + 4\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2(y'' - h'') \Big\}, \quad (z)$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{dy''^2}{dx''^2} = \frac{R^2}{[q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2]^2}.$$

et l'on en tirera

$$dx'' = \pm\,\frac{q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2}{R}\,dy''. \qquad (a')$$

Telle est l'équation qu'il reste à intégrer.

On sait que l'intégration d'une expression de cette espèce, dans laquelle R^2 est un polynôme du quatrième degré en y'', consiste dans la réduction aux fonctions elliptiques. Sous la forme (a'), l'intégration n'est pas même ramenée aux quadratures, à cause de la valeur infinie que prend le coefficient de dy'', quand y'' est égal à h'', et c'est le cas qui se présente pour le premier élément de l'intégrale. Or la réduction aux fonctions elliptiques exige la décomposition du polynôme R^2 en facteurs du premier degré, et cette décomposition nous présentera une circonstance favorable à la

réduction de l'intégrale aux quadratures; nous commencerons donc par opérer la décomposition du polynôme R^2 en ses facteurs du premier degré.

DÉCOMPOSITION DU POLYNÔME R^2 EN SES FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ. LIMITES DE LA COURBE INTRADOS DANS LE SENS DES y.

12. La question dont il s'agit se résout ordinairement par la détermination des racines du polynôme R^2 égalé à zéro. Dans le cas actuel, l'un des facteurs $y'' - h''$ est déjà connu, et il ne resterait plus qu'à résoudre une équation du troisième degré; mais la forme des racines étant trop compliquée, lorsqu'on fait usage de la formule de Cardan, pour que nous songions à appliquer cette dernière, et l'exactitude rigoureuse de la valeur des racines n'étant point nécessaire ici, puisque la valeur du polynôme n'est exacte que jusqu'aux termes du deuxième ordre inclusivement, nous devrons recourir à un autre procédé, celui de la réduction des racines en séries ordonnées suivant les puissances de e, dans lesquelles nous négligerons les termes d'ordres supérieurs au second.

Nous commencerons par déterminer les parties de chacun des facteurs du polynôme du troisième degré, qui sont indépendantes des termes du premier et du second ordre : pour cela nous rechercherons les facteurs du polynôme en faisant abstraction de ces termes, dont la suppression le réduit à

$$(y'' + h'')\left[2q^2 - (y''^2 - h''^2)\right].$$

L'un des facteurs du premier degré est en évidence; en égalant à zéro l'autre facteur, il vient

$$y''^2 = h''^2 + 2q^2.$$

Posons

$$H^2 = h''^2 + 2q^2, \qquad (b')$$

on tirera de l'équation précédente,

$$y'' = \pm H,$$

de sorte que les deux facteurs cherchés seront $H + y''$ et $H - y''$ (nous changeons ici le signe de la différence $y'' - H$ à cause du signe — qui affecte y''^2 dans le facteur du deuxième degré). Le produit des trois facteurs, en négligeant les termes du premier et du deuxième ordre, est donc

$$(y'' + h'')\,(H + y'')\,(H - y'').$$

Désignons maintenant par $\alpha' e$, $\beta' e$, $\gamma' e$ les termes du premier ordre qui doivent entrer dans la composition des facteurs que nous nous proposons de déterminer, de telle sorte que le produit de ces facteurs soit, à des termes près du deuxième ordre,

$$(y'' + h'' + \alpha' e)\,(H + y'' + \beta' e)\,(H - y'' + \gamma' e);$$

il s'agit de déterminer les valeurs de α', β' et γ' de manière que les termes du premier ordre provenant du produit de ces facteurs soient identiques avec ceux qui font partie du polynôme proposé, quel que soit y''. Quant aux termes de l'ordre de y'', il n'y a point à s'en occuper, puisqu'ils sont nécessairement identiques avec ceux du polynôme, en vertu de la décomposition que nous venons d'effectuer. Formons donc l'expression des termes du premier ordre que peut fournir le produit des facteurs ci-dessus : on aperçoit immédiatement que ces termes ne peuvent provenir que du produit du terme du premier ordre de chacun des facteurs, par le produit des termes des deux autres facteurs qui sont de l'ordre de y''. On a de la sorte, pour les termes dont il s'agit,

$$\alpha' e\,(H + y'')\,(H - y'') + \beta' e\,(y'' + h'')\,(H - y'') + \gamma' e\,(y'' + h'')\,(H + y'').$$

Or la somme de ces termes devant être égale, pour toute valeur de y'', à la somme des termes du premier ordre qui entrent dans la composition du polynôme du troisième degré, laquelle est

$$4\,\frac{1-i}{i}\,eq^2 - 4\,eh''\,(y'' + h''),$$

nous allons égaler les coefficients des mêmes puissances de y^* dans ces deux sommes, et en faisant abstraction du facteur commun e, nous aurons les trois équations de condition

$$\alpha' H^2 + (\beta' + \gamma') H h'' = 4 \frac{1-i}{i} q^2 - 4 h''^2,$$
$$(\beta' + \gamma') H - (\beta' - \gamma') h'' = - 4 h'',$$
$$- \alpha' - \beta' + \gamma' = 0.$$

La dernière de ces équations donne

$$\alpha' = - (\beta' - \gamma');$$

substituant cette valeur dans la première et multipliant la seconde par h'', il vient

$$(\beta' + \gamma') H h'' - (\beta' - \gamma') H^2 = 4 \frac{1-i}{i} q^2 - 4 h''^2,$$
$$(\beta' + \gamma') H h'' - (\beta' - \gamma') h''^2 = - 4 h''^2;$$

puis en soustrayant,

$$- (\beta' - \gamma') (H^2 - h''^2) = 4 \frac{1-i}{i} q^2;$$

mais on a (b')

$$H^2 - h''^2 = 2 q^2,$$

il en résulte

$$\beta' - \gamma' = - 2 \frac{1-i}{i},$$

et, en substituant cette valeur dans la deuxième des équations de condition,

$$(\beta' + \gamma') H + 2 \frac{1-i}{i} h'' = - 4 h'',$$

ou

$$(\beta' + \gamma') H = - \frac{2}{i} (1 + i) h'';$$

on en tire

$$\beta' + \gamma' = - \frac{2}{i} (1 + i) \frac{h''}{H}.$$

En ayant égard à la valeur ci-dessus de α' en β' et γ', puis se servant des expressions de la différence et de la somme de ces deux dernières quantités que nous venons de trouver, on formera les valeurs suivantes:

$$\alpha' = 2\,\frac{1-i}{i},$$

$$\beta' = -\,\frac{1-i}{i} - \frac{1+i}{i}\,\frac{h''}{\mathrm{H}},$$

$$\gamma' = +\,\frac{1-i}{i} - \frac{1+i}{i}\,\frac{h''}{\mathrm{H}}.$$

Actuellement, désignons les termes du deuxième ordre respectivement par $\alpha''e^2$, $\beta''e^2$, $\gamma''e^2$, de sorte que le produit des trois facteurs soit

$$(y''+h''+\alpha'e+\alpha''e^2)\,(\mathrm{H}+y''+\beta'e+\beta''e^2)\,(\mathrm{H}-y''+\gamma'e+\gamma''e^2);$$

nous aurons simplement à identifier les termes du deuxième ordre fournis par ce produit, avec ceux du polynôme du troisième degré, puisque ceux du premier et ceux de l'ordre de y'' se trouvent identiques en vertu des calculs précédents. Remarquons à ce sujet que les termes du deuxième ordre de ce produit proviendront d'abord du produit de chaque terme de cet ordre faisant partie d'un facteur, par le produit des deux autres facteurs débarrassés de leurs termes du premier et du deuxième ordre; puis ensuite du produit de deux termes du premier ordre contenus dans deux facteurs différents, par l'autre facteur débarrassé de ses termes du premier et du deuxième ordre. Cette remarque nous permettra d'écrire immédiatement les termes du deuxième ordre dont il s'agit, et en les égalant à ceux contenus dans le polynôme du troisième degré, on aura l'équation

$$\left.\begin{array}{l}\alpha''e^2(\mathrm{H}^2-y''^2)+\beta''e^2(y''+h'')(\mathrm{H}-y'')+\gamma''e^2(y''+h'')(\mathrm{H}+y'')\\ +\alpha'\beta'e^2(\mathrm{H}-y'')+\alpha'\gamma'e^2(\mathrm{H}+y'')+\beta'\gamma'e^2(y''+h'')\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{8}{3i}\,e^2(y''+h'')-8\,\frac{1-i}{i}\,e^2\,h''\\ +\,4\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2(y''-h''),\end{array}\right.$$

qui se décompose, en égalant séparément les coefficients des mêmes puissances de γ'', en les trois équations suivantes :

$$\alpha'' H^2 + (\beta'' + \gamma'') H h'' + \alpha' (\beta' + \gamma') H + \beta' \gamma' h'' = \frac{8}{3i} h'' - 8 \frac{1-i}{i} h'' - 4 \frac{(1-i)^2}{i^2} h'',$$

$$(\beta'' + \gamma'') H - (\beta'' - \gamma'') h'' - \alpha' (\beta' - \gamma') + \beta' \gamma' = \frac{8}{3i} + 4 \frac{(1-i)^2}{i^2},$$

$$-\alpha'' - \beta'' + \gamma'' = 0.$$

La dernière de ces équations donne

$$\alpha'' = -(\beta'' - \gamma'');$$

substituant cette valeur dans la première, multipliant la deuxième par h'', et transposant les termes connus dans les seconds membres, il viendra

$$(\beta'' + \gamma'') H h'' - (\beta'' - \gamma'') H^2 = -\alpha' (\beta' + \gamma') H - \beta' \gamma' h'' + \frac{8h''}{3i} - 4 \frac{(1-i)^2}{i^2} h'' - 8 \frac{1-i}{i} h'',$$

$$(\beta'' + \gamma'') H h'' - (\beta'' - \gamma'') h''^2 = +\alpha' (\beta' - \gamma') h'' - \beta' \gamma' h'' + \frac{8h''}{3i} + 4 \frac{(1-i)^2}{i^2} h'';$$

soustrayons la première de la seconde, nous aurons

$$(\beta'' - \gamma'')(H^2 - h''^2) = \alpha' [(\beta' + \gamma') H + (\beta' - \gamma') h''] + 8 \frac{(1-i)^2}{i^2} h'' + 8 \frac{1-i}{i} h'';$$

mais nous avons trouvé plus haut les valeurs de $(\beta' + \gamma') H$ et $\beta' - \gamma'$; elles donnent immédiatement

$$(\beta' + \gamma') H + (\beta' - \gamma') h'' = -\frac{4}{i} h'':$$

au moyen de cette relation et de la valeur de α', le second membre de l'équation précédente se réduit à

$$-\frac{8}{i^2}(1-i) h'' + \frac{8}{i^2}(1-i)^2 h'' + 8 \frac{1-i}{i} h'' = 0;$$

cette même équation donne par suite

$$\beta'' - \gamma'' = 0.$$

Reprenant la deuxième équation de condition, nous aurons, en vertu de $\beta'' - \gamma'' = 0$ et des valeurs déterminées précédemment de α', $\beta' - \gamma'$, β' et γ',

$$(\beta'' + \gamma'')\,\mathrm{H} = \frac{(1-i)^2}{i^2} - \frac{(1+i)^2}{i^2}\,\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2} + \frac{8}{3i};$$

d'où, en ayant égard à la même équation $\beta'' - \gamma'' = 0$,

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{2i^2\mathrm{H}}\left[1 + \frac{2}{3}i + i^2 - (1+i)^2\,\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}\right].$$

En vertu de cette égalité des valeurs de β'' et γ'', celle de α'' se réduit à zéro,

$$\alpha'' = 0.$$

Dans le but de simplifier les calculs qui vont suivre, nous donnerons aux expressions de β'' et γ'' une autre forme. Faisons disparaître le dénominateur H^2 de la parenthèse; en tenant compte de la relation (b'), nous aurons

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{2i^2\mathrm{H}^3}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)(h''^2 + 2q^2) - (1+i)^2 h''^2\right];$$

réunissons les termes affectés des facteurs h''^2 et q^2, il viendra finalement

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{i^2\mathrm{H}^3}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right].$$

Au moyen des valeurs de α', β', γ', α'', β'', γ'' que nous venons de déterminer, les trois facteurs dont nous proposions de former les expressions en négligeant les termes des ordres supérieurs au second, deviennent respectivement

$$\gamma'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e,$$

$$\mathrm{H} - \frac{1-i}{i}e - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{\mathrm{H}}e + \frac{1}{i^2\mathrm{H}^2}\left[\left(1+\frac{2}{3}i+i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2 + \gamma'',$$

$$\mathrm{H} + \frac{1-i}{i}e - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{\mathrm{H}}e + \frac{1}{i^2\mathrm{H}^2}\left[\left(1+\frac{2}{3}i+i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2 - \gamma''.$$

8.

Posons pour abréger

$$\Theta = \mathrm{H} - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{\mathrm{H}}e + \frac{1}{i^2\mathrm{H}^2}\left[\left(1+\frac{2}{3}i+i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2, \quad (c')$$

les deux derniers facteurs deviendront

$$\Theta + \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right), \quad \Theta - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right),$$

et leur produit pourra s'écrire

$$\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2;$$

de sorte que la valeur (z) de R^2 prendra la forme

$$\mathrm{R}^2 = (y'' - h'')^2\left(y'' + h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right)\left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]. \quad (d')$$

13. Les limites de la courbe intrados dans le sens des y, s'obtiendront en posant $\frac{dy''}{dx''} = 0$, condition qui sera remplie, d'après l'équation (a'), lorsque l'on aura $\mathrm{R} = 0$. Or la décomposition que nous venons d'opérer, de la fonction R^2 en facteurs, donne le moyen de déterminer les limites dont il s'agit, en posant chacun des facteurs égal à zéro : il en résulte, pour valeur des ordonnées maxima et minima de la courbe, les quantités suivantes, que nous disposons par ordre de grandeur,

$$-\left(\Theta - \frac{1-i}{i}e\right), \; -\left(h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right), \; +h'', \; +\left(\Theta + \frac{1-i}{i}e\right).$$

L'ordre de grandeur de ces quantités ne paraît pas évident si l'on ne remonte point aux valeurs de Θ et H en fonction de h'', et si l'on ne se rappelle pas que h'' est positif d'après la nature de la question. D'ailleurs l'ordre que nous venons d'établir est simplement subordonné aux trois conditions suivantes

$$h'' < \Theta - 3\frac{1-i}{i}e, \quad h'' + \frac{1-i}{i}e > 0, \quad h'' < \Theta + \frac{1-i}{i}e,$$

qui évidemment se réalisent dans le cas de la question qui nous occupe.

Nous allons faire voir maintenant que la courbe se compose de deux branches séparées, l'une située tout entière du côté des y positifs, et comprise entre deux parallèles à l'axe des x menées aux distances h'' et $\Theta + \frac{1-i}{i}e$, l'autre située du côté des y négatifs, et comprise entre deux autres droites parallèles menées aux distances $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right)$ et $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i}e\right)$.

En effet, la condition que le radical R reste réel exige que le polynôme R^2 soit positif. Or ce polynôme est du quatrième degré en y'' et le terme affecté de y''^4 est négatif : si l'on fait $y'' = \pm\infty$, la valeur de R^2 devient infinie et négative; elle ne change de signe que lorsqu'on fait décroître la valeur absolue de y'' en la ramenant aux limites extrêmes $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i}e\right)$, $+\left(\Theta + \frac{1-i}{i}e\right)$. Donc la courbe ne contient aucun point situé en dehors de ces limites. La valeur de R^2 commence à devenir positive lorsque y'' atteint ces valeurs, puisqu'il n'existe pas de racines égales; et, si l'on continue de faire décroître la valeur absolue de y'', on voit que R^2 reste positif jusqu'à ce que y'' atteigne les valeurs où il change de signe, ce qui a lieu aux limites $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right)$ et $+h''$; le signe de R^2 se trouve changé entre ces limites et devient négatif. On doit conclure de cet examen que la courbe est composée de deux branches, l'une située entre les limites $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i}e\right)$ et $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right)$, l'autre comprise entre les limites $\Theta + \frac{1-i}{i}e$ et h''; et qu'en outre l'espace compris entre les limites $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right)$ et $+h''$ n'en renferme aucun point, non plus que les espaces situés au delà des limites extrêmes.

L'équation (a') fait connaître l'ordonnée du point où la tangente est parallèle à l'axe des y; en effet, en ce point on a $\frac{dx''}{dy''} = 0$,

et l'équation (a') fournit, pour satisfaire à cette condition, la relation

$$q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y'' = \pm \sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}.$$

Les limites obtenues et la détermination des points où la tangente est verticale vont nous permettre d'aborder la discussion de la forme de la courbe, et de fixer l'usage que l'on devra faire du double signe du radical R de l'équation (a'). Observons qu'en vertu de ce double signe la courbe est symétrique par rapport à un axe parallèle à l'axe des y, dont la position ne dépend que du choix de la constante introduite par l'intégration, de sorte qu'ayant déterminé les circonstances de la forme de la courbe en ne considérant à la fois qu'un seul des deux signes, il suffira d'avoir égard à la symétrie, pour se figurer les parties de la courbe que l'on n'aura point étudiées.

Occupons-nous en premier lieu de la branche située du côté des y positifs, et partons de $y'' = h''$. Supposons d'abord R positif ou considérons le signe + dans l'expression (a') de dx''. Les limites que nous avons reconnues, de la valeur de y'', nous obligent à faire dy'' positif; or le numérateur de dx'' est positif, tant que l'on a $y''^2 < q^2 + (h'' - e)^2$, la valeur de x'' croît depuis $y'' = h''$ jusqu'à $y'' = \sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}$. A cette valeur de y'', le numérateur devient nul et change ensuite de signe, ce qui rend dx'' négatif au-delà de cette valeur; ainsi l'abscisse décroît d'abord depuis le point dont il s'agit, jusqu'à la limite $\Theta + \frac{1-i}{i} e$, de y'' : or cette limite ne pouvant être dépassée, il faut faire décroître y'', et afin que la courbe ne s'arrête point brusquement, nous devons changer le signe de R de sorte que $\frac{dy''}{R}$ se trouve encore positif. De cette manière le numérateur reste négatif, jusqu'à ce que y'' ait atteint dans sa décroissance la valeur $+\sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}$; et

l'abscisse continue de diminuer jusqu'en cet endroit : mais au delà, le numérateur reprend sa valeur positive, et le rapport $\frac{dy''}{R}$ étant toujours positif, x'' croît de nouveau jusqu'à ce que y'' ait atteint la limite h''. Au delà de ce point, il faut faire croître y'', c'est-à-dire prendre dy'' positif et aussi le signe de R; il en résulte de nouveaux accroissements de x'' égaux aux précédents, pour les mêmes accroissements dy'' et les mêmes valeurs de y''. La courbe présente dès lors une reproduction périodique des mêmes formes qui lui donne quelque ressemblance avec les cycloïdes allongées.

Si l'on considère la branche située du côté des y négatifs, on reconnaîtra sans peine qu'elle présente une forme tout à fait analogue à celle de l'autre branche; et cette branche serait exactement symétrique avec la première, par rapport à l'axe des x, si l'on avait $i = 1$. On reconnaîtra de plus que la condition de continuité dans les parties de cette branche exigera que l'on choisisse le signe de R de manière que $\frac{dy''}{R}$ reste positif comme dans la première. Et l'on conclura de cette convention que le signe de R sera nécessairement contraire dans les parties correspondantes des deux branches.

Nous nous sommes étendu longuement sur la discussion de la forme des deux branches de la courbe, quoique nous ne devions utiliser qu'une faible partie de l'une d'elles; mais nous avions à fixer relativement aux signes de $\frac{dy''}{R}$ et de R des conventions dont l'une nous servira pour l'intégration de l'équation (a'), et l'autre, pour la vérification des coefficients que nous présentera l'intégrale de cette expression.

RÉDUCTION DE L'INTÉGRALE DE L'EXPRESSION (a') AUX QUADRATURES.

14. Nous avons reconnu, après avoir établi cette expression, l'impossibilité de lui appliquer la méthode des quadratures, et nous en avons indiqué la cause, dans la présence du facteur $\sqrt{y''-h''}$

au dénominateur de la valeur de dx''. Nous aurons recours au procédé de l'intégration par parties, pour faire disparaître cette difficulté, en faisant passer le facteur dont il s'agit du dénominateur au numérateur.

Posons

$$V^2 = \left(y'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)\left(\Theta^2 - (y'' - \frac{1-i}{i}\,e)^2\right),$$

la valeur de R deviendra

$$R = V\sqrt{y'' - h''},$$

et l'équation (a') pourra s'écrire

$$\pm\, dx'' = \frac{q^2 - 2h''e + e^2 - ({y''}^2 - {h''}^2)}{V\sqrt{y'' - h''}}\, dy''.$$

En intégrant et séparant les intégrales, il vient

$$\pm\, x'' = (q^2 - 2\,h''e + e^2)\int\frac{dy''}{V\sqrt{y'' - h''}} - \int\frac{(y'' + h'')\sqrt{y'' - h''}}{V}\, dy''.$$

Effectuons la première intégration par parties, nous aurons

$$\int\frac{dy''}{V\sqrt{y'' - h''}} = \frac{2\sqrt{y'' - h''}}{V} - 2\int\sqrt{y'' - h''}\, d\,\frac{1}{V}.$$

Or on a

$$d\,\frac{1}{V} = -\,\frac{dV}{V^2} = -\,\frac{2V\,dV}{2V^3} = -\,\frac{1}{2V}\,\frac{d.V^2}{V^2}.$$

D'un autre côté, en appliquant à l'expression de V^2 la différentiation logarithmique, il vient

$$\frac{d.V^2}{V^2} = \frac{dy''}{y'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e} - \frac{2\left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)dy''}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)^2},$$

et, par suite,

$$d\,\frac{1}{V} = -\frac{1}{2}\,\frac{dy''}{\left(y''+h''+2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)^2}}$$

$$+\frac{\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)dy''}{\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\sqrt{y''+h''+2\,\frac{1-i}{i}\,e}}.$$

Au moyen de ces expressions, on aura finalement

$$\pm\, x'' = 2\,(q^2-2\,h''e+e^2)\,\frac{\sqrt{y''-h''}}{\sqrt{\left(y''+h''+2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)^2\right]}}$$

$$+\,(q^2-2\,h''e+e^2)\int\frac{\sqrt{y''-h''}\,dy''}{\left(y''+h''+2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)^2}}$$

$$-\,2\,(q^2-2\,h''e+e^2)\int\frac{\sqrt{y''-h''}\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)dy''}{\sqrt{y''+h''+2\,\frac{1-i}{i}\,e}\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\int\frac{\sqrt{y''-h''}\,(y''+h'')\,dy''}{\sqrt{\left(y''+h''+2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)^2\right]}}.$$

On devra remarquer qu'aucun des éléments de ces intégrales ne devient infini pour des valeurs de y'' comprises entre h'' et $\sqrt{q^2+(h''-e)^2}$, les seules dont nous ayons à faire usage, et que, par conséquent, ces intégrales sont propres à recevoir l'application de la méthode des quadratures. Mais nous renoncerons à faire usage de l'expression précédente de x'', qui serait plus longue à calculer que celle que nous obtiendrons plus loin, dût-on, dans celle-ci, calculer par quadratures les deux fonctions elliptiques de première et deuxième espèce qu'elle renferme.

RÉDUCTION AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES, DE L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA COURBE INTRADOS (*).

15. Nous mettrons d'abord la valeur de R^2 sous la forme d'un carré parfait, en posant

$$(y'' - h'')\left(y'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e\right) = \left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)^2\right] z^2, \quad (e')$$

relation de laquelle on tire

$$z = \pm\sqrt{\frac{(y'' - h'')\left(y'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)^2}},$$

et qui donne, en effet, pour la valeur de R^2,

$$R^2 = \left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)^2\right]^2 z^2;$$

d'où

$$R = \left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)^2\right] z. \quad (f')$$

Nous supposons ici R susceptible de prendre le double signe; et comme y'' ne peut recevoir de valeurs qui rendent négatif le facteur de z, ainsi qu'il résulte des limites fixées précédemment, il suit de là que z a nécessairement le signe de R.

Tirons actuellement de l'équation (e') la valeur de y'' en z; il viendra d'abord, en développant,

$$y''^2 - h''^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,y''e - 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e = \Theta^2 z^2 - y''^2 z^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,ey''z^2 - \frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2 z^2,$$

(*) Ceux des lecteurs qui, étrangers à la théorie des fonctions elliptiques, craindraient de ne pouvoir suivre les développements dans lesquels nous allons entrer, pourront passer immédiatement aux nos 29 et 30, où nous indiquons une solution numérique et une solution graphique fondées sur la détermination de l'intrados au moyen de son rayon de courbure.

puis, en ordonnant,

$$y''^2(1+z^2)+2\frac{1-i}{i}e(1-z^2)y''=\left[\Theta^2-\frac{(1-i)^2}{i^2}e^2\right]z^2$$
$$+2\frac{1-i}{i}h''e+h''^2.$$

Multiplions tous les termes de cette équation par $1+z^2$, et résolvons-la par rapport au produit $y''(1+z^2)$ considéré comme étant l'inconnue, il viendra

$$y''(1+z^2)=-\frac{1-i}{i}e(1-z^2)$$
$$\pm\sqrt{z^2(1+z^2)\left[\Theta^2-\frac{(1-i)^2}{i^2}e^2\right]+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2(1-z^2)^2+\left(2\frac{1-i}{i}h''e+h''^2\right)(1+z^2)}.$$

Désignons par Z^2 la quantité comprise sous le radical, nous aurons, en supposant provisoirement Z susceptible de prendre le double signe,

$$y''(1+z^2)=-\frac{1-i}{i}e(1-z^2)+Z. \qquad (g')$$

Or différentions l'équation (e'), nous aurons

$$\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)dy''+(y''-h'')dy''=2z\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]dz$$
$$-2z^2\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)dy'',$$

ou, en réunissant les termes affectés des mêmes différentielles et divisant par le facteur commun 2,

$$\left[y''+\frac{1-i}{i}e+z^2\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)\right]dy''=z\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]dz;$$

mais le premier membre étant ordonné par rapport à y'', et le facteur de dz dans le second étant remplacé par sa valeur tirée de (f'), cette équation devient

$$\left[y''(1+z^2)+\frac{1-i}{i}e(1-z^2)\right]dy''=Rdz;$$

d'un autre côté, le facteur de dy'' est égal à Z, d'après (g') : on a donc

$$Zdy'' = Rdz,$$

d'où

$$\frac{dy''}{R} = \frac{dz}{Z}. \qquad (h')$$

Nous avons établi, dans le n° 13, que le rapport $\frac{dy''}{R}$ doit rester positif; il suffira, pour faire usage de l'équation (h'), de donner à Z un signe tel, que le rapport $\frac{dz}{Z}$ soit également positif.

Formons actuellement la valeur de Z^2 : cette valeur, en ordonnant par rapport à z, et supprimant les termes qui se détruisent, devient

$$Z^2 = z^4\Theta^2 + z^2\left[\Theta^2 - 3\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e + h''^2\right] + \frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e + h''^2,$$

ou bien

$$Z^2 = z^4\Theta^2 + z^2\left[\Theta^2 + h''^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e - 3\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2\right] + \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2.$$

Nous avons encore besoin de décomposer la quantité Z^2 en ses facteurs du second degré; mais, pour cela, nous calculerons préalablement la valeur du coefficient du deuxième terme : formons donc le carré de la valeur de Θ équation (c'); nous aurons, en négligeant les termes du troisième ordre,

$$\Theta^2 = H^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2H^2}\left[\left(1+\frac{2}{3}i+i^2\right)2q^2 - \frac{4}{3}ih''^2 + (1+i)^2h''^2\right]e^2.$$

En ayant égard à l'équation (b'), puis opérant les réductions, cette valeur deviendra

$$\Theta^2 = h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(1+\frac{2}{3}i+i^2\right)e^2. \qquad (i''$$

Or les termes qui suivent Θ^2, dans le coefficient du deuxième terme de la valeur de Z^2, sont

$$h''^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e - 3\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2:$$

en faisant la somme de ces termes et de Θ^2, le facteur de z^2 devient

$$2h''^2 + 2q^2 - 4h''e + \frac{\frac{20}{3}i - 2i^2 - 2}{i^2}\,e^2,$$

et la valeur de Z^2 se réduit à

$$Z^2 = z^4\Theta^2 + 2z^2\left[h''^2 + g^2 - 2h''e + \frac{\frac{10}{3}i - i^2 - 1}{i^2}\,e^2\right] + \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2;$$

mais au lieu de décomposer cette expression en facteurs, il sera plus simple de décomposer en facteurs le produit $Z^2\Theta^2$.

Posons, pour abréger,

$$m^2 = h''^2 + q^2 - 2h''e + \frac{\frac{10}{3}i - i^2 - 1}{i^2}\,e^2, \qquad n^2 = \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2,$$

il viendra

$$Z^2\Theta^2 = z^4\Theta^4 + 2z^2\Theta^2m^2 + n^2\Theta^2:$$

il suffit d'égaler à zéro le second membre de cette équation, et d'en tirer les racines; ces racines sont

$$z^2\Theta^2 = -m^2 \pm \sqrt{m^4 - n^2\Theta^2}.$$

Posons encore

$$K^2 = m^4 - n^2\Theta^2,$$

nous aurons, pour expression du polynôme ci-dessus décomposé en ses facteurs,

$$Z^2 \Theta^2 = (z^2 \Theta^2 + m^2 + K)(z^2 \Theta^2 + m^2 - K).$$

Il reste à calculer les quantités $m^2 + K$, $m^2 - K$; et par suite m^4, puis le produit $- n^2 \Theta^2$. Effectuons les deux dernières de ces opérations sans réductions d'abord; nous aurons, en écrivant séparément les valeurs des trois termes dont se compose $- n^2 \Theta^2$,

$$m^4 = +(h''^2 + q^2)^2 - 4(h''^2 + q^2)h''e + 2\,\frac{\frac{10}{3}i - i^2 - 1}{i^2}(h''^2 + q^2)e^2 + 4h''^2 e^2$$

$$-\Theta^2 h''^2 = -(h''^2 + 2q^2)h''^2 + 2\,\frac{1+i}{i}h''^2 h'' e \qquad - \frac{1 + \frac{2}{3}i + i^2}{i^2}h''^2 e^2$$

$$-2\,\Theta^2 \frac{1-i}{i}h'' e = \qquad -2\,\frac{1-i}{i}(h''^2 + 2q^2)h'' e \qquad + 4\,\frac{1-i^2}{i^2}h''^2 e^2$$

$$-\Theta^2 \frac{(1-i)^2}{i^2}e^2 = \qquad - \frac{(1-i)^2}{i^2}(h''^2 + 2q^2)e^2.$$

Ajoutons ces équations membre à membre, il viendra, toutes réductions faites, et à cause de $K^2 = m^4 - n^2 \Theta^2$,

$$K^2 = q^4 - \frac{4}{i}q^2 h'' e + \frac{4q^2 e^2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right) + \frac{4h''^2 e^2}{i^2}(2i - i^2).$$

Pour extraire la racine, nous mettrons en évidence le facteur q^4, ainsi qu'il suit :

$$K^2 = q^4 \left\{ 1 - \frac{4}{i}\frac{h'' e}{q^2} + \frac{4e^2}{i^2 q^2}\left[\frac{8}{3}i - i^2 - 1 + \frac{h''^2}{q^2}(2i - i^2)\right] \right\}.$$

Élevant les deux membres de cette équation à la puissance $\frac{1}{2}$, nous aurons

$$K = q^2 \left\{ 1 - \frac{2}{i}\frac{h'' e}{q^2} + \frac{2e^2}{i^2 q^2}\left[\frac{8}{3}i - i^2 - 1 + \frac{h''^2}{q^2}(2i - i^2 - 1)\right] \right\},$$

et enfin

$$K = q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{2e^2}{i^2} \left[\frac{8}{3} i - i^2 - 1 - (1 - i)^2 \frac{h''^2}{q^2} \right]. \qquad (j')$$

Soient maintenant

$$M^2 = m^2 + K, \qquad N^2 = m^2 - K; \qquad (k')$$

nous aurons, au moyen de la valeur de m^2,

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= h''^2 + 2q^2 - \frac{2(1+i)}{i} h'' e \\ &\qquad + \frac{1}{i^2} \left[\frac{26}{3} i - 3i^2 - 3 - 2(1-i)^2 \frac{h''^2}{q^2} \right] e^2, \\ N^2 &= h''^2 + \frac{2(1-i)}{i} h'' e + \frac{(1-i)^2}{i^2} \left(1 + \frac{2h''^2}{q^2} \right) e^2, \end{aligned}\right\} \qquad (l')$$

et la valeur de $Z^2 \Theta^2$ décomposée en ses facteurs pourra s'écrire

$$Z^2 \Theta^2 = (z^2 \Theta^2 + M^2)(z^2 \Theta^2 + N^2),$$

ou bien encore

$$Z^2 \Theta^2 = M^2 N^2 \left(1 + z^2 \frac{\Theta^2}{M^2} \right) \left(1 + z^2 \frac{\Theta^2}{N^2} \right),$$

d'où l'on tire

$$Z = \pm \frac{MN}{\Theta} \sqrt{\left(1 + z^2 \frac{\Theta^2}{M^2} \right) \left(1 + z^2 \frac{\Theta^2}{N^2} \right)}. \qquad (m')$$

Soit φ un angle auxiliaire lié à z par la relation

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\Theta}{N} z, \qquad (n')$$

le même angle sera donné en fonction de y'' par cette autre équation déduite de (e'),

$$\operatorname{tang} \varphi = \pm \frac{\Theta}{N} \sqrt{\frac{(y'' - h'')\left(y'' + h'' + 2\frac{1-i}{i} e \right)}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i} e \right)^2}}. \qquad (o')$$

On aura réciproquement, pour la valeur de z en fonction de φ,

$$z = \frac{N}{\Theta} \operatorname{tang} \varphi; \qquad (p')$$

cette équation donne, en différentiant,

$$dz = \frac{N}{\Theta} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Substituons la valeur (p') de z dans l'équation (m'), il viendra

$$Z = \pm \frac{MN}{\Theta} \sqrt{\left(1 + \frac{N^2}{M^2} \operatorname{tang}^2 \varphi\right)(1 + \operatorname{tang}^2 \varphi)}.$$

Divisons membre à membre l'équation qui précède par celle-ci, nous aurons

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{\left(1 + \frac{N^2}{M^2} \operatorname{tang}^2 \varphi\right)(1 + \operatorname{tang}^2 \varphi)}}.$$

ou

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{N^2}{M^2} \sin^2 \varphi}}.$$

En remplaçant ici $\cos^2 \varphi$ par sa valeur $1 - \sin^2 \varphi$, il vient

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{M^2 - N^2}{M^2} \sin^2 \varphi}}.$$

Posons

$$c^2 = \frac{M^2 - N^2}{M^2}, \ (*) \qquad (q')$$

(*) La valeur de c^2 peut être mise sous une autre forme. En effet, les équations (k') donnent, par soustraction,

$$M^2 - N^2 = 2K;$$

d'où

$$M^2 = N^2 + 2K,$$

et, ensuite,

$$c^2 = \frac{2K}{N^2 + 2K}.$$

et, de plus,

$$\Delta^2 = 1 - c^2 \sin^2\varphi, \qquad (r')$$

nous aurons

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

L'équation (h') comparée à cette dernière donnera

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dy''}{R} = \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad (s')$$

en faisant abstraction du double signe; et, si nous voulons que cette formule soit générale, il suffira que nous disposions des valeurs de φ et Δ, de telle sorte que le rapport $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit toujours positif, attendu que $\frac{dy''}{R}$ doit toujours l'être, d'après ce qui a été dit au nº 13.

Voici comment on fixera les signes de ces variables : nous avons vu qu'en vertu de l'équation (f'), z doit avoir le signe de R; il résulte de l'équation (n') que tang φ doit avoir aussi le signe du radical R. Or, d'après la variation de signe de ce radical que nous avons reconnue nº 13, il faut que tang φ soit de même signe que le rapport $\frac{dy''}{ds''}$, le sens positif de ds'' étant celui que l'on obtiendrait en suivant le contour de la courbe depuis les x infinis négatifs jusqu'aux x infinis positifs.

Ainsi, dans la branche inférieure, on fera varier φ de 0° à 90°, pour y'' compris entre h'' et $\Theta + \frac{1-i}{i} e$, ce qui donne tang φ positif : en faisant décroître y'' depuis la limite $\Theta + \frac{1-i}{i} e$ jusqu'à la limite inférieure h'', φ variera de 90° à 180°, et tang φ sera négatif; il est clair qu'en faisant de nouveau croître et décroître y'', les mêmes valeurs de tang φ se reproduiront périodiquement avec les mêmes signes, et que φ pourra varier de 180° à 270°, puis de 270° à 360°, et ainsi de suite, à cause de tang $(180° + \varphi) = \text{tang}\,\varphi$. On aura donc $d\varphi$ positif dans toute l'étendue de la branche inférieure, et pour que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit toujours positif, il suffira que l'on prenne dans cette branche le radical Δ avec le signe +.

Dans la branche supérieure ou située du côté des y négatifs, en faisant décroître y'' depuis $-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$ jusqu'à $-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$, on pourra faire varier φ de 0° à — 90°, ce qui rendra tangφ négatif, comme cela doit être; puis, en faisant croître y'' depuis la limite supérieure négative $-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$ jusqu'à la limite inférieure négative $-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$, on devra faire varier φ de — 90° à — 180°, ce qui rendra tangφ positif : en continuant ensuite à faire décroître, puis croître successivement y'', φ prendra les valeurs — 270°, — 360°, etc. On aura donc $d\varphi$ négatif dans toute l'étendue de la branche supérieure, et pour que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ reste positif, il faudra que l'on prenne Δ négatif dans toute l'étendue de cette branche.

En résumé, il faudra, pour pouvoir faire servir l'auxiliaire φ à représenter la moitié de l'étendue indéfinie de la courbe intrados, lui attribuer des valeurs croissant indéfiniment à partir de zéro, dans la branche inférieure, en donnant à Δ le signe $+$; puis lui donner des valeurs négatives de grandeurs absolues indéfiniment croissantes, en faisant Δ négatif dans la branche supérieure. L'autre moitié résultera de la symétrie avec la première par rapport à un axe vertical passant par le point correspondant à $\varphi = 0$. On remarquera toutefois que les intégrales $\int\frac{d\varphi}{\Delta}$ et $\int\Delta d\varphi$ que fournira l'intégration conserveront les valeurs absolues qu'elles prendraient si Δ et l'amplitude φ étaient positives, puisque les deux quantités Δ et $d\varphi$ sont toujours de même signe. Fixons encore le signe de la fonction Z que nous avons laissé arbitraire dans l'équation (g'); observons que, d'après l'équation (h'), $\frac{dz}{Z}$ doit être positif, et que la différentielle de z tirée de (p') donne dz de même signe que $d\varphi$, c'est-à-dire positif dans la branche inférieure et négatif dans la branche supérieure : il faudra donc que l'on fasse pareillement Z positif dans la première et négatif dans la seconde; mais nous

n'aurons point à avoir égard à cette circonstance, attendu que Z n'entrera dans les équations finales que sous la forme Z^2 et $\frac{dz}{Z}$.

Au moyen de ces conventions, l'usage des doubles signes se trouve fixé, et il deviendra facile de procéder plus loin à la vérification susmentionnée des coefficients de l'équation de la courbe intrados.

16. L'équation (a') contient, outre le facteur $\frac{dy''}{R}$, un terme en y''^2 qu'il s'agit également de transformer. Or on tire de l'équation (g'),

$$y'' = \frac{Z - \frac{1-i}{i} e (1 - z^2)}{1 + z^2},$$

et il vient, en élevant au carré,

$$y''^2 = \frac{Z^2 - 2Z \frac{1-i}{i} e (1 - z^2) + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 (1 - z^2)^2}{(1 + z^2)^2};$$

puis, à cause de l'équation (h'), on en déduit

$$y''^2 \frac{dy''}{R} = \frac{Z^2}{(1 + z^2)^2} \frac{dz}{Z} - 2 \frac{1-i}{i} e \frac{1-z^2}{(1 + z^2)^2} dz + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 \frac{dz}{Z}.$$

Au moyen de la même équation (h') et de cette valeur, l'équation (a') devient

$$\left.\begin{aligned} dx'' = [q^2 + (h'' - e)^2] \frac{dz}{Z} - \frac{Z^2}{(1 + z^2)^2} \frac{dz}{Z} + 2 \frac{1-i}{i} e \frac{1-z^2}{(1 + z^2)^2} dz \\ - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 \frac{dz}{Z}. \end{aligned}\right\} (l')$$

Sous cette forme, on voit qu'il n'y a point à se préoccuper du signe de Z, puisque cette quantité n'entre qu'au carré et en diviseur de dz, et qu'il n'en résulte que des facteurs positifs. Transformons d'abord le terme algébrique : le coefficient de dz, dans ce terme, ne contenant que des puissances paires de z, son déve-

loppement sous forme de fractions ne devra contenir également que des puissances paires de z; on pourra donc poser

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{a}{1+z^2} + \frac{a'}{(1+z^2)^2}.$$

La réduction au même dénominateur donne

$$1 - z^2 = a\,(1+z^2) + a',$$

et l'on en tire, en égalant les coefficients des mêmes puissances de z^2,

$$1 = a + a', \quad -1 = a,$$

et, par suite, $a' = 2$: il vient donc

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\,\frac{dz}{(1+z^2)^2} - \frac{dz}{1+z^2};$$

or, on a, par les formules connues de réduction,

$$2\int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{1+z^2} + \int\frac{dz}{1+z^2},$$

d'où, en différentiant,

$$2\,\frac{dz}{(1+z^2)^2} = d\,\frac{z}{1+z^2} + \frac{dz}{1+z^2};$$

ajoutant membre à membre cette équation et l'équation différentielle précédente, il vient, pour l'expression transformée,

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = d\,\frac{z}{1+z^2}.$$

Transformons le facteur $\frac{Z^2}{(1+z^2)^2}$ du deuxième terme du second membre de (t'), et pour cela reprenons la valeur primitive de Z^2, nous aurons

$$\frac{Z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{z^4\Theta^2 + 2z^2m^2 + n^2}{z^4 + 2z^2 + 1};$$

extrayons maintenant de la fraction qui forme le second membre de cette équation, la partie entière qu'elle contient, la division donnera

$$\frac{Z^2}{(1+z^2)^2} = \Theta^2 - 2(\Theta^2 - m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2} - (\Theta^2 - n^2)\frac{1}{(1+z^2)^2}.$$

Enfin, extrayons aussi la partie entière de la fraction $\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2$ qui affecte le dernier terme de l'équation (t'), nous aurons

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} = \frac{z^2+1-2}{z^2+1} = 1 - \frac{2}{z^2+1},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 = 1 - \frac{4}{1+z^2} + \frac{4}{(1+z^2)^2}.$$

Au moyen de ces diverses valeurs, l'équation (t') deviendra

$$dx'' = [q^2 + (h'' - e)^2]\frac{dz}{Z} - \left[\Theta^2 - 2(\Theta^2 - m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2} - (\Theta^2 - n^2)\frac{1}{(1+z^2)^2}\right]\frac{dz}{Z}$$
$$+ 2\frac{1-i}{i}e.\,d\frac{z}{1+z^2} - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\left[1 - \frac{4}{1+z^2} + \frac{4}{(1+z^2)^2}\right]\frac{dz}{Z};$$

ou, en réunissant les termes de même forme,

$$\left.\begin{array}{l} dx'' = -\left[\Theta^2 - q^2 - (h'' - e)^2 + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{dz}{Z} + 2(\Theta^2 - m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{Z} \\ + \left[\Theta^2 - n^2 - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{1}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{Z} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 \frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{Z} + 2\frac{1-i}{i}e.\,d\frac{z}{1+z^2}. \end{array}\right\} (a')$$

17. Exprimons maintenant les facteurs qui contiennent z^2 en fonctions de φ, nous aurons d'abord, en vertu de l'équation (p'),

$$1 + z^2 = 1 + \frac{N^2}{\Theta^2}\,\text{tang}^2\varphi = \frac{\Theta^2\cos^2\varphi + N^2\sin^2\varphi}{\Theta^2\cos^2\varphi},$$

ou

$$1 + z^2 = \frac{\Theta^2 - (\Theta^2 - N^2)\sin^2\varphi}{\Theta^2\cos^2\varphi};$$

on en déduit

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{1 - \frac{\Theta^2 - N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi}.$$

Posons

$$\frac{\Theta^2 - N^2}{\Theta^2} = c^2 + c_1^2, \qquad (v')$$

il viendra

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{1-(c^2+c_1^2)\sin^2\varphi}.$$

Nous allons faire voir que c_1^2 est une quantité du deuxième ordre de petitesse. En effet, la relation précédente donne, en mettant pour c^2 sa valeur (q'),

$$1 - \frac{N^2}{\Theta^2} = 1 - \frac{N^2}{M^2} + c_1^2,$$

et il en résulte

$$c_1^2 = \frac{N^2}{M^2} - \frac{N^2}{\Theta^2} = \frac{N^2}{M^2\Theta^2}(\Theta^2 - M^2):$$

les valeurs (i') de Θ^2, et (l') de M^2, ne diffèrent que dans les termes du deuxième ordre, et la différence de ces termes se réduit à

$$2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(2+\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2;$$

si l'on a égard à la relation (b'), on en déduit

$$\Theta^2 - M^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{H^2}{q^2} e^2.$$

Or pour former la valeur de c_1^2, en négligeant les termes du troisième ordre, on doit négliger, dans les facteurs M^2, N^2 et Θ^2, les termes du premier et du deuxième ordre, puisque le facteur que nous venons de calculer est du second; ces facteurs se réduisent dès lors à H^2, h''^2 et H^2, et il vient simplement

$$c_1^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}. \qquad (w')$$

La valeur de c_1^2 est donc effectivement du deuxième ordre, ainsi que nous venons de l'annoncer. Nous profiterons de cette circonstance pour éviter les fonctions elliptiques de troisième espèce.

Considérons, en effet, la fonction

$$\frac{1}{1-(c^2+c_1^2)\sin^2\varphi};$$

nous aurons, en développant cette fonction suivant les puissances de c_1^2, au moyen du théorème de Taylor, et nous bornant au terme en c_1^2,

$$\frac{1}{1-(c^2+c_1^2)\sin^2\varphi} = \frac{1}{1-c^2\sin^2\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^2}\,c_1^2,$$

et la valeur ci-dessus de $\frac{1}{1+z^2}$, en faisant usage de la formule (r'), pourra s'écrire

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\,c_1^2;$$

on tire de là

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4} + 2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^6}\,c_1^2,$$

puis, au moyen de l'équation (p'),

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{N}{\Theta}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} + \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi}{\Delta^4}\cdot\frac{h'}{H}\,c_1^2$$

(on remplace ici, dans le terme du deuxième ordre, le rapport $\frac{N}{\Theta}$ par $\frac{h'}{H}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre, et ne donne lieu, par suite, qu'à des erreurs du troisième).

En élevant au carré les deux membres de cette équation, il vient

$$\frac{z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{N^2}{\Theta^2}\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4} + 2\,\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^6}\,\frac{h'^2}{H^2}\,c_1^2.$$

équation dans laquelle $\frac{k''}{H}$ tient la place de $\frac{N}{\Theta}$ au dernier terme, par les mêmes raisons que tout à l'heure.

Substituons maintenant les diverses valeurs que nous venons d'exprimer en fonctions de φ, dans l'équation (u') dont nous multiplierons préalablement tous les termes par M, puis à la place de $M\frac{dz}{Z}$, sa valeur $\frac{d\varphi}{\Delta}$ tirée de (s'), et enfin à la place de c_1^2, sa valeur (w'); il viendra, en négligeant des termes d'ordres supérieurs au second,

$$\begin{aligned} M\,dx'' = &-\left[\Theta^2 - q^2 - (h''-e)^2 + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ 2(\Theta^2 - m^2)\left[\frac{N^2}{\Theta^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^4}{H^4}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ \left[\Theta^2 - n^2 - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\left[\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^4}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\frac{d\varphi}{\Delta} + 2\,\frac{1-i}{i}\,e\,\frac{MN}{\Theta}\,.\,d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Il devient indispensable de présenter ici le développement de chacun des coefficients, que l'on effectuera sans peine au moyen des valeurs de Θ^2, m^2 et n^2:

$$1^{er}\text{ coefficient} = -\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right],$$

$$2^{e}\text{ coefficient} = +2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right],$$

$$3^{e}\text{ coefficient} = +2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right)e^2\right].$$

Le quatrième coefficient n'a point de changement à subir. Quant au dernier, observons qu'il suffit d'avoir égard au terme du premier ordre, dans la valeur du produit $\frac{MN}{\Theta}$, puisque ce dernier coefficient est lui-même du premier ordre. Or nous pouvons tirer

la valeur du rapport $\frac{M}{\Theta}$, de l'expression obtenue ci-dessus de la différence $\Theta^2 - M^2$; elle donne, en effet,

$$\frac{M^2}{\Theta^2} = 1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{e^2}{q^2},$$

en substituant l'unité au rapport $\frac{H^2}{\Theta^2}$ dans le terme du deuxième ordre; on en déduit

$$\frac{M}{\Theta} = 1 - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{e^2}{q^2}.$$

Cette quantité ne différant de l'unité que par un terme du deuxième ordre doit être réduite à l'unité dans l'expression du produit $\frac{MN}{\Theta}$, ce qui réduit ce produit à la valeur de N développée jusqu'aux termes du premier ordre inclusivement; or, la valeur (l') de N^2 peut s'écrire

$$N^2 = \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{q^2}\,e^2,$$

et lors même que h'', qui est toujours $> e$, serait très-petit, on aurait encore, aux termes près du deuxième ordre,

$$N = h'' + \frac{1-i}{i}\,e.$$

Le dernier coefficient a donc pour expression

$$2\,\frac{1-i}{i}\,h''e + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2.$$

Au moyen de ces valeurs des divers coefficients, l'équation différentielle ci-dessus devient

$$\begin{aligned}
M\,dx'' = &-\left[q^2 - 2\,\frac{h''e}{i} + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 2\left[q^2 - 2\,\frac{h''e}{i} + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\left[\frac{N^2}{\Theta^2}\frac{\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi}{\Delta^2} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^4}{H^4}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^4\varphi\,\cos^2\varphi}{\Delta^6}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 2\left[q^2 - 2\,\frac{h''e}{i} + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right)e^2\right]\left[\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^2\varphi\,\cos^4\varphi}{\Delta^6}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\frac{d\varphi}{\Delta} + 2\left[\frac{1-i}{i}h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right] d\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta^2}.
\end{aligned}$$

Développons les produits indiqués dans le second membre, et négligeons les termes d'ordres supérieurs au deuxième, nous aurons

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathrm{M}\,dx'' = &- \left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\frac{\mathrm{N}^2}{\Theta^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi \\
&+ 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right)e^2\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi \\
&+ 8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^4}{\mathrm{H}^4}e^2\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}d\varphi \\
&+ 8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}e^2\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^5}d\varphi \\
&+ 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi \\
&+ 2\left[\frac{1-i}{i}h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right] d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^5}.
\end{aligned}
\right\} (x')
$$

18. Commençons par effectuer la réduction des termes du deuxième ordre qui ont Δ^5 en dénominateur. Ces termes peuvent s'écrire

$$8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}e^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\left(\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi,$$

et la dernière parenthèse de cette expression donne

$$\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 - \left(1 - \frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}\right)\sin^2\varphi\,:$$

or on peut substituer dans cette valeur, à la place de $\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}$, le rapport $\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}^2}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre, et, par suite, ne peut produire que des erreurs du troisième; il

en résulte que le facteur $1 - \frac{h''^2}{H^2}$ pourra être remplacé par c^2 d'après (q'), et que l'on aura, en ayant égard à la relation (r'),

$$\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \Delta^2, \qquad (y')$$

valeur exacte aux quantités près du premier ordre.

La somme des termes du deuxième ordre qui ont Δ^2 en dénominateur se réduit ainsi à

$$8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{H^2} e^2 \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi. \qquad (z')$$

Les termes qui ont Δ^4 en dénominateur dans la valeur de $M\,dx''$ peuvent se grouper ainsi qu'il suit :

$$2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^4}\left(\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$+ \frac{4}{i^2}(1+i^2)e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^4}\left(\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$+ \frac{16}{3i}e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^4}\left(2\cos^2\varphi - \frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi\right)d\varphi.$$

(Dans les deux derniers termes, qui sont du deuxième ordre, on a remplacé le rapport $\frac{N^2}{\Theta^2}$ par $\frac{h''^2}{H^2}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre.) Le premier de ces termes va se réduire aisément : en effet, on a, en ayant égard aux relations (v'), (r') et (w'),

$$\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 - \frac{\Theta^2 - N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi = 1 - (c^2 + c_1^2)\sin^2\varphi,$$

$$\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \Delta^2 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}\sin^2\varphi;$$

en substituant cette valeur, le premier terme donne

$$2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}e^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi. \qquad (a'')$$

Pour transformer le deuxième terme, écrivons la parenthèse sous la forme

$$\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = -\left(\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + 2\,\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi;$$

puisqu'il s'agit ici de termes du second ordre, on aura d'après (y'),

$$\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = -\Delta^2 + 2\,\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

et le deuxième terme donnera

$$-\frac{4}{i^2}(1+i^2)\,e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi + \frac{8}{i^2}(1+i^2)\,\frac{k''^2}{H^2}\,e^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\,d\varphi. \quad (b'')$$

Enfin écrivons la parenthèse du troisième terme sous la forme

$$2\cos^2\varphi - \frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi = 2\left(\cos^2\varphi + \frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi\right) - 3\,\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

on aura, de la même manière,

$$2\cos^2\varphi - \frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi = 2\,\Delta^2 - 3\,\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

et le troisième terme deviendra

$$\frac{32}{3i}\,e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi - \frac{16}{i}\,\frac{k''^2}{H^2}\,e^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\,d\varphi. \quad (c'')$$

Le seul terme qui contienne Δ^2 en dénominateur dans l'équation (x') est

$$4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi. \quad (d'')$$

Observons que l'ensemble des termes (z'), (a''), (b''), (c'') et (d'') est l'équivalent de la somme des cinq termes compris entre le premier et le dernier du second membre de (x'); il ne reste, pour former l'expression transformée de la valeur de $M\,dx''$, qu'à réunir

ces termes aux termes extrêmes du second membre de (x'). Effectuant cette réunion, et ordonnant en même temps, il vient

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}\,dx'' = &- \left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}\,i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ 2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i}\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi \\ &+ 12\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}\,e^2\,\frac{\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi \\ &+ 2\left[\frac{1-i}{i}\,h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right] d\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta^3} \end{aligned}\right\}(e'')$$

18 *bis*. Nous allons nous trouver obligé de donner des formules de réduction applicables à l'équation qui précède. Proposons-nous d'abord de réduire l'exposant élevé qui entre au dénominateur du troisième terme de son second membre.

On arrivera par la différentiation, et en opérant convenablement les réductions, à la formule suivante :

$$d\,\frac{\sin^m\varphi\,\cos^n\varphi}{\Delta^{2k-1}} = \left(m - \frac{m+n}{c^2}\right)\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-1}}\,d\varphi + \frac{m+n}{c^2}\,\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-3}}\,d\varphi$$
$$+ (2k-1)\,c^2\,\frac{\sin^{m+1}\varphi\cos^{n+1}\varphi}{\Delta^{2k+1}}\,d\varphi,$$

d'où l'on tire inversement

$$\frac{\sin^{m+1}\varphi\cos^{n+1}\varphi}{\Delta^{2k+1}}\,d\varphi = \frac{1}{(2k-1)\,c^2}\left\{\begin{aligned} d\,\frac{\sin^m\varphi\cos^n\varphi}{\Delta^{2k-1}} + \left(\frac{m+n}{c^2} - m\right)\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-1}}\,d\varphi \\ - \frac{m+n}{c^2}\,\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-3}}\,d\varphi \end{aligned}\right\}.(f'')$$

En faisant dans cette formule $m = 1$, $n = 1$ et $k = 2$, il viendra

$$\frac{\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi = \frac{1}{3c^2}\left\{d\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta^3} + \left(\frac{2}{c^2} - 1\right)\frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{2}{c^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

D'un autre côté, si l'on différentie l'expression $\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta}$ et que l'on opère les réductions, on arrivera à la relation

$$d\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c^2}\left[\Delta\,d\varphi - (1 - c^2)\,\frac{d\varphi}{\Delta^3}\right],$$

d'où l'on déduit inversement

$$\frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{1-c^2}\left\{\Delta\, d\varphi - c^2\, d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right\}. \qquad (g'')$$

Substituant cette valeur de $\frac{d\varphi}{\Delta^3}$ dans l'expression différentielle ci-dessus, on aura

$$\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi = \frac{1}{3c^2}\left\{d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} - \frac{2-c^2}{1-c^2}\,d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + \frac{1}{c^2}\,\frac{2-c^2}{1-c^2}\,\Delta\,d\varphi - \frac{2}{c^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

Or cette expression différentielle affectant dans l'équation (e'') un terme du deuxième ordre, on peut y substituer à la place de c^2 sa valeur obtenue en négligeant ceux du premier et du deuxième, laquelle est, d'après les équations (q') et (l'),

$$c^2 = \frac{2q^2}{h''^2+2q^2} + \ldots = 2\,\frac{q^2}{H^2} + \ldots:$$

on en tire.

$$\frac{1}{c^2} = \frac{H^2}{2q^2}, \quad 1 - c^2 = \frac{h''^2}{H^2}, \qquad 2 - c^2 = 1 + \frac{h''^2}{H^2} = 2\,\frac{h''^2+q^2}{H^2},$$

et, par suite,

$$\frac{2-c^2}{1-c^2} = 2\left(1 + \frac{q^2}{h''^2}\right), \qquad \frac{1}{c^2}\,\frac{2-c^2}{1-c^2} = \frac{H^2}{q^2} + \frac{H^2}{h''^2}.$$

Au moyen de ces diverses valeurs, le terme qui contient Δ^5 dans l'équation (e'') se transformera en

$$2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}e^2\left\{d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} - 2\left(1+\frac{q^2}{h''^2}\right)d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + H^2\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{h''^2}\right)\Delta\,d\varphi - \frac{H^2}{q^2}\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}. \quad (h'')$$

Occupons-nous maintenant du facteur $\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi$; nous aurons

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{1-\sin^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi:$$

on peut écrire

$$-\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\,\frac{1-c^2\sin^2\varphi-1}{\Delta^2}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{d\varphi}{\Delta^2}\right);$$

on en déduit

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-(1-c^2)\,\frac{d\varphi}{\Delta^2}\right),$$

puis, en ayant égard à l'équation (g''),

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-\Delta\,d\varphi + c^2\,d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right),$$

et le deuxième terme du second membre de (e'') devient

$$2\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]\left[\frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{1}{c^2}\Delta\,d\varphi + d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right]. \quad (i'')$$

Réunissons les expressions (h'') et (i'') aux deux termes extrêmes du second membre de l'équation (e''), puis ordonnons; il viendra

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{M}\,dx'' = &\Big\{\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]-\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{1}{i^2}\left(2-\frac{4}{3}i+i^2\right)e^2\right]\\
&\qquad\qquad -2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{\mathrm{H}^2h''^2}{q^4}e^2\Big\}\frac{d\varphi}{\Delta}\\
&-\Big\{\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1+\frac{h''^2}{q^2}\right)\frac{\mathrm{H}^2}{q^2}e^2\Big\}\Delta\,d\varphi\\
&+2\Big\{q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1+\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\Big\}\,d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\\
&+2\Big\{\frac{1-i}{i}h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\Big\}\,d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}\\
&+2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}e^2\,d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}.
\end{aligned}\right\}(j'')$$

Avant d'écrire l'intégrale de cette expression, nous réduirons les coefficients de ses différents termes. Et d'abord considérons la quantité

$$\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]$$

qui fait partie des deux premiers coefficients : substituons à c^2 sa valeur

$$c^2 = \frac{2\,\mathrm{K}}{\mathrm{M}^2}$$

qu'on obtient en vertu de $\mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2 = 2\,\mathrm{K}$, la quantité ci-dessus deviendra

$$\mathrm{M}^2 \frac{q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{4}{3} \frac{e^2}{i}}{\mathrm{K}}.$$

Soit, pour abréger,

$$\mathrm{K}_1 = q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{4}{3} \frac{e^2}{i};$$

la valeur (j') de K pourra se mettre sous la forme

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 - 2 \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2,$$

et la même quantité deviendra

$$\mathrm{M}^2 \frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}_1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2} = \frac{1}{1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) \frac{e^2}{q^2}} \mathrm{M}^2,$$

en divisant haut et bas par K_1, et substituant ensuite q^2 à la place de K_1, dans le terme du deuxième ordre ; mais si nous réduisons en série le facteur de M^2, la quantité dont il s'agit aura pour expression

$$\left[1 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) \frac{e^2}{q^2}\right] \mathrm{M}^2;$$

effectuant le produit indiqué ici au moyen de la valeur (l') de M^2, cette quantité deviendra

$$h''^2 + 2q^2 - 2\left(\frac{1+i}{i}\right) h'' e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3} i - 3i^2 - 3 - 2(1-i)^2 \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2$$
$$+ 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right)\left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2.$$

Réduisons les termes du deuxième ordre, ces termes deviendront successivement

$$\frac{1}{i^2}\left\{\frac{26}{3}i-3i^2-3+2(1-i)^2\left(2+2\frac{h''^2}{q^2}+\frac{h'^2}{q^2}\right)\right\}e^2$$

$$=\frac{1}{i^2}\left\{\frac{26}{3}i-3i^2-3+4-8i+4i^2+2(1-i)^2\left(2+\frac{h''^2}{q^2}\right)\frac{h''^2}{q^2}\right\}e^2$$

$$=\frac{1}{i^2}\left\{1+\frac{2}{3}i+i^2+2(1-i)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}\right\}e^2,$$

et l'on aura finalement

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]&=h''^2+2q^2-2\frac{1+i}{i}h''e\\&+\frac{1}{i^2}\left[1+\frac{2}{3}i+i^2+2(1-i)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}\right]e^2.\end{aligned}\right\}\quad(k'')$$

Cette valeur va nous servir à opérer la réduction des coefficients de $\frac{d\varphi}{\Delta}$ et $\Delta d\varphi$ dans l'équation (j''); en effet, pour former le premier, nous devons ajouter au second membre de (k'') les termes

$$-q^2+\frac{2}{i}h''e-\frac{1}{i^2}\left[2-\frac{4}{3}i+i^2+2(1-i)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}\right]e^2.$$

En ajoutant et réduisant, il vient

$$\text{coeff. de }\frac{d\varphi}{\Delta}=h''^2+q^2-2h''e+\frac{2i-1}{i^2}e^2.$$

Pour former le coefficient suivant, il faut ajouter au même membre les termes

$$-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2}{q^2}e^2-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}e^2,$$

et changer ensuite le signe du résultat : effectuant ces opérations, on a

$$\text{coeff. de } \Delta\, d\varphi = -\left[h''^2 + 2\,q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(1 + \frac{2}{3}\,i + i^2 - 2\,(1-i)^2\,\frac{H^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

On peut donner au coefficient de e^2 une autre forme en remplaçant H^2 par sa valeur $h''^2 + 2\,q^2$, d'où résulte $\frac{H^2}{q^2} = 2 + \frac{h''^2}{q^2}$; on trouve, en faisant cette substitution,

$$\text{coeff. de } \Delta d\varphi = -\left[h''^2 + 2\,q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}\,i - 3\,i^2 - 3 - 2\,(1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

En réunissant les termes en e^2 du coefficient du terme suivant, on aura

$$\text{coeff. de } d\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta} = 2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1 - (1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

Au moyen de ces valeurs réduites des coefficients, l'équation (j'') devient finalement

$$\left.\begin{aligned}
M\,dx'' = &+\left[h''^2 + q^2 - 2\,h''e + \frac{2i-1}{i^2}\,e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta}\\
&-\left[h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}\,i - 3\,i^2 - 3 - 2\,(1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right]\Delta\,d\varphi\\
&+ 2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1 - (1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right]d\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta}\\
&+ 2\left[\frac{1-i}{i}\,h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]d\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta^3}\\
&+ 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}\,e^2\,d\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta^5}.
\end{aligned}\right\}\;(l'')$$

19. Maintenant l'intégration de l'équation différentielle de l'intrados se trouve dépendre des fonctions elliptiques. En effet, posons, comme le fait Legendre,

$$F(c,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad E(c,\varphi)=\int_0^\varphi \Delta\, d\varphi; \qquad (m'')$$

posons en même temps

$$\left.\begin{array}{l}
A=h''^2+q^2-2h''e+\frac{2i-1}{i^2}e^2,\\
B=h''^2+2q^2-2\frac{1+i}{i}h''e+\frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}i-3i^2-3-2(1-i)^2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2,\\
C=2\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i-i^2-1-(1-i)^2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right], \qquad (^*)\\
D=2\left[\frac{1-i}{i}h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right],\\
G=2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}e^2;
\end{array}\right\}(n'')$$

nous aurons, en intégrant l'équation (l''), et supposant x'' nul en même temps que φ,

$$Mx''=A.F(c,\varphi)-B.E(c,\varphi)+C\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}+D\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}+G\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^5}. \qquad (o'')$$

(*) Nous ferons remarquer que les coefficients B et C, comparés aux expressions (l') et (j'), donnent

$$B=M^2, \quad C=2K.$$

Il est probable qu'en suivant dans l'intégration une marche plus directe, on aurait obtenu ces relations *a priori*. Cela eût été d'autant plus intéressant que nous ne pouvons affirmer leur exactitude que jusque dans les termes du deuxième ordre inclusivement. (Au lieu de rechercher les moyens de réduire les développements analytiques dans cette partie du Mémoire, nous avons préféré consacrer le temps dont nous pouvions disposer, au calcul des Tables que l'on trouvera à la fin de la deuxième partie.)

Les équations précédentes simplifient la valeur de c^2 qui devient

$$c^2=\frac{C}{B};$$

et l'on peut écrire $\sqrt{B}$ à la place de M, dans l'équation (o'').

Telle est l'équation de l'intrados qu'il s'agissait d'obtenir, et dans laquelle x'' se trouve implicitement affecté du double signe, en vertu de la relation (o'). Nous n'avons tenu compte que de l'un des deux signes en discutant les parties des deux branches de la courbe qui s'étendent vers les x positifs; la symétrie autour d'un axe qui se confond actuellement avec l'axe des y en vertu de la valeur nulle de la constante de l'intégration, nous a dispensé de nous occuper des deux signes à la fois. On voit maintenant qu'en ayant égard au double signe de $\tang \varphi$, l'équation (o'') représente la courbe dans toute son étendue.

On remarquera, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut, que l'expression de x'' perd deux termes lorsqu'on suppose $i = 1$; en effet, cette hypothèse rend nuls les coefficients D et G, en même temps qu'elle simplifie les valeurs des trois premiers.

Avant de faire usage de l'équation (o'') en l'appliquant à la question des arches de pont, il convient d'indiquer un procédé rapide pour le calcul des fonctions F et E, et de vérifier l'exactitude des coefficients (n'').

CALCUL DES FONCTIONS F ET E.

20. On emploie deux procédés différents pour le calcul de ces fonctions, suivant que le module c est voisin de l'unité ou de zéro. Il est facile de voir que, dans la question des arches de pont, ce module diffère peu de l'unité : en effet, c^2 ne diffère de 1, en vertu de l'équation (q'), que de la quantité $\frac{N^2}{M^2}$; or le carré h''^2 de l'ordonnée du sommet de l'intrados est en général assez petit par rapport à $2q^2$, à cause de la grandeur du produit $e\mu_1$, équation (s); c^2 diffère donc peu de l'unité.

Dans cette hypothèse, on calcule une échelle de modules c_1, c_2, c_3, ..., c_n par les formules suivantes:

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1},\quad c_3 = \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2},\ \ldots,\ c_n = \frac{2\sqrt{c_{n-1}}}{1+c_{n-1}};$$

on calcule pareillement une série d'amplitudes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, par les équations

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = c \sin\varphi,$$
$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = c_1 \sin\varphi_1,$$
$$\sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = c_2 \sin\varphi_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = c_{n-1} \sin\varphi_{n-1},$$

et l'on s'arrête, dans le calcul des modules, au module c_n qui devient égal à l'unité, du moins, au degré d'approximation que l'on veut obtenir; on poursuit le calcul des amplitudes jusqu'à celle φ_n qui correspond à $c_n = 1$, d'où résulte l'égalité de toutes les amplitudes suivantes. On a ensuite, entre les fonctions F des modules et amplitudes de mêmes indices, les relations

$$F(c_n, \varphi_n) = \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi_n\right), \quad (*)$$
$$F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = \frac{2}{1+c_{n-1}} F(c_n, \varphi_n),$$
$$F(c_{n-2}, \varphi_{n-2}) = \frac{2}{1+c_{n-2}} F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(c_2, \varphi_2) = \frac{2}{1+c_2} F(c_3, \varphi_3),$$
$$F(c_1, \varphi_1) = \frac{2}{1+c_1} F(c_2, \varphi_2),$$
$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} F(c_1, \varphi_1).$$

(*) Le logarithme qui figure ici est un logarithme népérien ou hyperbolique.

On en déduirait, en multipliant ces équations membre à membre,

$$F(c,\varphi)=\frac{2}{1+c}\cdot\frac{2}{1+c_1}\cdot\frac{2}{1+c_2}\cdots\cdot\frac{2}{1+c_{n-2}}\cdot\frac{2}{1+c_{n-1}}\log\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi_n\right);$$

mais le calcul de la fonction E exige, lorsque c diffère peu de l'unité, que l'on fasse usage des fonctions F intermédiaires.

Au moyen des modules, amplitudes et fonctions F précédemment calculées, les formules suivantes serviront au calcul de la fonction E:

$$E(c_n,\varphi_n)=\sin\varphi_n,$$

$$E(c_{n-1},\varphi_{n-1})=(1+c_{n-1})E(c_n,\varphi_n)+(1-c_{n-1})F(c_n,\varphi_n)-c_{n-1}\sin\varphi_{n-1}$$

$$E(c_{n-2},\varphi_{n-2})=(1+c_{n-2})E(c_{n-1},\varphi_{n-1})+(1-c_{n-2})F(c_{n-1},\varphi_{n-1})-c_{n-2}\sin\varphi_{n-2},$$

. . . .

$$E(c_2,\varphi_2)=(1+c_2)E(c_3,\varphi_3)+(1-c_2)F(c_3,\varphi_3)-c_2\sin\varphi_2,$$

$$E(c_1,\varphi_1)=(1+c_1)E(c_2,\varphi_2)+(1-c_1)F(c_2,\varphi_2)-c_1\sin\varphi_1,$$

$$E(c,\varphi)=(1+c)E(c_1,\varphi_1)+(1-c)F(c_1,\varphi_1)-c\sin\varphi.$$

Les formules qui précèdent peuvent paraître longues à calculer; pourtant il n'en est rien, dans le cas qui nous occupe : en général, il suffira de calculer un seul module et une seule amplitude, ce qui réduira le calcul de F et de E à l'emploi de la première et de la dernière formule de chaque série.

On pourrait profiter de la petite différence que nous admettons entre c et l'unité pour réduire les intégrales (m'') en séries ordonnées suivant les puissances de $(1-c^2)$; nous préférons nous en tenir aux formules que nous venons de reproduire, attendu qu'elles sont encore facilement applicables au calcul des fonctions F et E lorsque c diffère beaucoup plus de l'unité que nous ne l'avons supposé.

VÉRIFICATION DE L'EXACTITUDE DES COEFFICIENTS (*).

21. Nous ne prétendons pas donner ici la vérification générale de ces coefficients, ce qui conduirait à des calculs fort pénibles; mais seulement les vérifier dans quelques cas particuliers. Nous allons différentier l'équation (o''), et pour cela, considérons la fonction

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^k};$$

nous aurons, en différentiant,

$$d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^k} = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\Delta^k}d\varphi + k\frac{c^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^{k+2}}d\varphi,$$

et, en faisant successivement dans cette formule $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$, nous obtiendrons les différentielles des parties variables des derniers termes du second membre de (o''). Quant à celles des premiers termes, elles résulteront de la suppression du signe $\int$ dans les équations (m''). Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\,dx'' = \mathrm{A}\frac{d\varphi}{\Delta} - \mathrm{B}\Delta d\varphi + \mathrm{C}\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\Delta} + c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right)d\varphi \\ + \mathrm{D}\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\Delta^2} + 2c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\right)d\varphi + \mathrm{G}\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\Delta^3} + 3c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\right)d\varphi. \end{aligned}$$

Or nous avons, équation (s'),

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{dy''}{\mathrm{R}},$$

et, d'après l'équation (a'),

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{dx''}{q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2},$$

en faisant abstraction du double signe; on en tire

$$\mathrm{M}\Delta\frac{dx''}{d\varphi} = q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2;$$

égalant le second membre de cette équation à la valeur de $M\Delta\frac{dx''}{d\varphi}$ tirée de l'expression de Mdx'', il vient

$$\left.\begin{array}{l} q^2+(h''-e)^2-y''^2=A-B\Delta^2+C\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^2}\right) \\ +D\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta}+2c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right)+G\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^2}+3c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\right).\end{array}\right\}(p'')$$

Cette relation entre y'' et φ étant générale, doit pouvoir être aisément vérifiée dans certains cas particuliers.

Soit, en premier lieu, $y''=h''$ ordonnée du sommet de l'intrados, l'équation (o') donne $\tang\varphi=0$, d'où $\sin^2\varphi=0$, $\cos^2\varphi=1$, et $\Delta=1$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation (p''), il en résulte la relation suivante entre les coefficients,

$$q^2-2h''e+e^2=A-B+C+D+G. \qquad (q'')$$

Soit, en second lieu, $y''=-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$ ordonnée du point de la branche supérieure le plus voisin de l'axe des x, l'équation (o') donnera pareillement $\tang\varphi=0$, et l'on aura comme tout à l'heure $\sin^2\varphi=0$, $\cos^2\varphi=1$; mais le point dont il s'agit appartenant à la branche supérieure, nous devrons, d'après ce qui a été dit au n° 15, donner à Δ le signe $-$, d'où résultera $\Delta=-1$. Substituant ces valeurs dans l'équation (p''), il viendra

$$q^2-2h''e+e^2-4\frac{1-i}{i}h''e-4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2=A-B+C-D+G. \quad (r'')$$

Soustrayons membre à membre cette équation de la précédente, nous aurons d'abord

$$4\frac{1-i}{i}h''e+4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2=2D,$$

puis, en divisant par 2 et transposant,

$$D=2\left[\frac{1-i}{i}h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right].$$

Or cette valeur de D est précisément celle qui fait partie des équations (n''); il est donc seulement nécessaire de vérifier la relation (q'') pour que les deux équations (q'') et (r'') se trouvent à la fois vérifiées.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur les équations (n'') pour voir que la somme des termes de l'ordre de q^2 contenus dans les seconds membres, en y changeant le signe de B, se réduit effectivement à q^2, ainsi que l'exige la relation (q''). La somme des coefficients des termes du premier ordre qui ont tous $h''e$ pour facteur est $-2+2\frac{1+i}{i}-\frac{4}{i}+2\frac{1-i}{i}$, somme qui se réduit évidemment à -2, comme dans l'équation (q''). Enfin, cette même équation exige que la somme des coefficients de e^2, dans le second membre de (n''), se réduise à l'unité. Or cette somme est

$$\frac{1}{i^2}\left[2i-\frac{26}{3}i+\frac{32}{3}i+3i^2-4i^2-1+3-4+2(1-i)^2\left(\frac{h''^2}{q^2}-\frac{2h''^2}{q^2}+1+\frac{h''^2}{q^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{i^2}\left[4i-i^2-2+2(1-i)^2\right]=\frac{1}{i^2}(4i-i^2-2+2-4i+2i^2)=\frac{i^2}{i^2}=1.$$

On pourrait encore appliquer l'équation (p'') aux ordonnées extrêmes $y''=\Theta+\frac{1-i}{i}e$, et $y''=-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$ pour lesquelles on a $\tang\varphi=\pm\infty$ et $\sin^2\varphi=1$; mais alors on a $\Delta=\pm\sqrt{1-c^2}$, ou, d'après la note du n° 19, $\Delta=\pm\frac{\sqrt{B-C}}{\sqrt{B}}$, et la vérification ne pourrait s'opérer algébriquement qu'au moyen de développements fort longs dans lesquels nous nous dispenserons d'entrer, pensant que les vérifications précédentes et la comparaison des valeurs numériques fournies par l'équation (o'') avec de nombreux tracés déduits de l'expression (w) du rayon de courbure, prouvent suffisamment l'exactitude de nos formules.

DÉTERMINATION DES CONSTANTES.

22. Avant de nous livrer à l'examen des deux cas principaux que présente la question des arches de pont, lesquels sont ceux

des arches dites *en arc de cercle* et des arches *en anse de panier*, nous croyons devoir résumer ici les diverses formules auxquelles nous sommes parvenu dans les numéros précédents, en les présentant dans l'ordre de leur application, et modifiant l'expression de quelques coefficients suivant les indications fournies par la note du n° 19 ; et cela, dans le but d'éviter de faire dépendre un coefficient de la différence de grands nombres peu différents. Il résulte de cette note que l'on a

$$B = M^2, \quad C = 2K, \quad c^2 = \frac{C}{B}.$$

Or, d'après la note du n° 15, on a d'ailleurs

$$M^2 = N^2 + 2K,$$

et, par suite,

$$B = M^2 = N^2 + C.$$

Enfin, nous avons trouvé, n° 17,

$$\Theta^2 - M^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{H^2}{q^2} e^2;$$

il en résulte

$$\Theta^2 = M^2 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{H^2}{q^2} e^2 = B + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2.$$

Nous nous servirons de ces relations pour déduire des équations (r), (s), (l'), (o'), (n''), (o''), et (x), les formules qui vont figurer dans le tableau suivant :

Tableau des formules relatives à l'équation de la courbe intrados.

$$h'' = h + e$$

$$q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i}$$

$$N^2 = h''^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1 + 2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2$$

$$A = h''^2 + q^2 - 2\,h''e + \frac{2\,i-1}{i^2}\,e^2$$

$$C = 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1 - (1-i)^2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right]$$

$$B = C + N^2$$

$$D = 2\left[\frac{1-i}{i}\,h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]$$

$$G = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^4\frac{h''^2}{q^2}\,e^2$$

$$\Theta^2 = B + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right)e^2$$

$$c^2 = \frac{C}{B}$$

$$\text{tang}^2\varphi = \frac{\Theta^2}{N^2}\,\frac{(y''-h'')\left(y''+h''+2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)}{\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}\,e\right)^2}$$

$$\Delta^2 = 1 - c^2\sin^2\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} F(c,\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} \\ E(c,\varphi) &= \int_0^\varphi \Delta\, d\varphi \end{aligned}\right\}\ \text{par les formules du n° 20, ou par les Tables de fonctions elliptiques.}$$

$$\sqrt{B}.x'' = A.F(c,\varphi) - B.E(c,\varphi) + C\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + D\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} + G\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^4}$$

$$2\,\delta = \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}\,y'' = \frac{i}{6}\,\frac{e}{\mu_0}\,y''.$$

(s'')

Il résulte de l'inspection de ce tableau, que si l'on considère comme donné le rapport i de la densité du massif à celle de la voûte, les formules qui le composent ne se trouvent renfermer d'autres constantes indéterminées que les trois quantités e, $\mu_{\prime}$ et h.

23. Les données ordinaires d'un projet d'arche sont : la demi-ouverture, la hauteur sous clef à partir des naissances, ou la flèche, puis la hauteur de la charge au-dessus de la clef, que nous avons désignée par h. (Nous verrons, dans la deuxième partie, comment on ramène à dépendre de ces données, la solution des questions où l'une d'elles serait remplacée par une condition relative à la différence de niveau des naissances et de la chaussée.) Il résulte de cette énumération, que le nombre des inconnues à déterminer se réduit effectivement aux deux seules quantités e et $\mu_{\prime}$. Souvent on se dispense d'avoir égard à la charge h dans le calcul d'une arche, et cependant elle mérite plus d'attention. Disons d'abord que la hauteur de cette charge provient ordinairement, dans les ponts, d'un lit de maçonnerie en béton, reposant sur le plan horizontal tangent à l'extrados, d'une couche de cailloux, d'une autre de gravier, d'une couche de sable, et enfin du pavé lui-même, quant à la chaussée; dans les ponts-canaux, plusieurs de ces couches sont remplacées par une couche d'eau. Nous supposerons remplacée, pour le calcul, la hauteur de chacune d'elles par la hauteur d'une couche de la matière du massif qui aurait le même poids, ce qui se fera en la multipliant par le rapport de sa densité propre à celle du massif; et ce sera la somme de ces hauteurs réduites que nous désignerons par h.

Actuellement, distinguons les deux espèces d'arches dont nous devons nous occuper. L'équation de l'intrados que nous avons obtenue ci-dessus est celle d'une courbe qui diffère assez du cercle pour qu'on ne doive pas nous supposer l'intention de lui substituer un arc de cercle, même vers le sommet : néanmoins, pour éviter toute confusion, nous désignerons par *arches incomplètes* celles du genre des arches dites *en arc de cercle*, dans lesquelles les tangentes extrêmes à l'intrados réel feront, avec l'horizontale,

un angle moindre que 90°; et nous nommerons *arches complètes* les arches *en anse de panier* où ces tangentes extrêmes sont verticales. Ces dénominations se justifient par la considération des angles que font les tangentes menées au sommet et aux extrémités de l'intrados.

Soient f et g la flèche et la demi-ouverture données. Dans le cas des *arches incomplètes*, se donner ces deux quantités, revient à faire passer la courbe intrados par un point donné dont la position est celle des naissances, et il ne peut résulter de l'expression des coordonnées x'' et y'' en fonction de f et g, qu'une seule équation de condition entre les données et les inconnues du problème; d'où il suit que, dans les arches dont il s'agit, on peut prendre arbitrairement l'une des quantités e et μ_0. Dans le cas des *arches complètes*, outre cette condition résultant des données f et g, il en existe une autre introduite par la verticalité des tangentes extrêmes, et qu'on exprimera en écrivant dans l'équation propre à fournir le maximum de l'abscisse de l'intrados réel, à la place de y_m, sa valeur en fonction de f. On a donc ici deux conditions qui suffiront pour déterminer e et μ_0.

La constante μ_0 est la valeur au sommet de l'arche, de la variable μ dont nous avons expliqué le caractère au n° 6. Cette variable exprime, ainsi que nous l'avons dit, la hauteur d'une colonne de la matière des voussoirs dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans les joints normaux. Cette quantité, d'après l'expression (v), croît depuis le sommet de l'arche avec les ordonnées, et il importe que la plus grande valeur qu'elle puisse prendre ne dépasse jamais une certaine limite fixée par la résistance des matériaux employés. Nous désignerons par μ_1 la valeur de μ au point inférieur de la voûte, ou dans le joint des naissances. Il est bon de connaître à peu près la plus grande des valeurs de μ ou de μ_1 qu'on puisse adopter. Or Navier, dans son *Résumé des leçons sur l'application de la Mécanique*, n° 176, fixe la limite des pressions que l'on peut employer avec sécurité dans les arches, à 610 kilogrammes pour une surface de 25 centimètres

carrés. On en déduit $\mu = 100$ mètres, si l'on prend pour poids du mètre cube, $\varpi = 2440$ kilogrammes; c'est le poids du liais de Bagneux : les autres pierres employées aux environs de Paris donneraient des valeurs de μ un peu plus fortes, à cause de leur moindre densité. Suivant Navier, on ne s'exposerait donc point à trop charger les voûtes, toutes les fois que μ ou μ_1 ne dépasserait pas 100 mètres. Il va sans dire que les matériaux employés doivent présenter, quant à la résistance, les qualités des pierres employées dans les bonnes constructions, comme celles que Navier a dû avoir en vue, lorsqu'il a énoncé son assertion. Nous pouvons présenter un exemple frappant dans lequel on reconnaîtra facilement que la limite $\mu = 100$ mètres a été dépassée; les piliers prismatiques de l'aqueduc de Spolette ont plus de 100 mètres de hauteur, et sont chargés d'une énorme construction à leur partie supérieure : il est facile d'en conclure, malgré le défaut d'indications sur la dureté et la densité des pierres employées, que la valeur de μ à la partie inférieure des piliers, doit excéder 100 mètres.

Nous allons maintenant tirer de l'équation (v) une relation entre μ_0 et μ_1. Cette équation est

$$\mu - \mu_0 = y'' - h'' + \frac{1}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2);$$

nous rappellerons qu'on y a négligé les termes du deuxième ordre qui se trouveraient être du troisième par rapport à μ : or, si nous négligeons les différences des coordonnées de l'intrados réel et de l'intrados fictif, qui sont du deuxième ordre de petitesse, nous aurons, à ces différences près, au point inférieur de l'intrados,

$$y'' - h'' = f,$$

d'où

$$y'' + h'' = f + 2h'',$$

et

$$\frac{y''^2 - h''^2}{\mu_0} = \frac{f(f + 2h'')}{\mu_0};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, et écrivant μ_1 au lieu de μ, on en déduira

$$\mu_1 = \mu_0 + f + i\,\frac{f(f + 2h')}{3\,\mu_0}: \qquad (t'')$$

on tire inversement de cette équation

$$\mu_0 = \mu_1 - f - i\,\frac{f(f + 2h')}{3\,(\mu_1 - f)}, \qquad (u'')$$

expression dans laquelle f pourrait être négligé devant μ_1 au dénominateur du dernier terme.

L'usage de ces équations est facile à saisir : dans le cas des *arches incomplètes* où μ_0 est arbitraire, on fixera la limite μ_1 arbitrairement, mais de sorte qu'elle ne dépasse pas 100 mètres par exemple, et l'on déduira μ_0 de l'équation (u''). Lorsqu'il s'agira d'*arches complètes*, et que μ_0 et e auront été déterminés de manière à satisfaire aux deux conditions énoncées plus haut, on fera usage de l'équation (t'') pour calculer μ_1 et s'assurer que sa valeur ne dépasse pas la limite de μ qu'on aura adoptée; si elle la dépassait, il faudrait nécessairement modifier les données du projet.

CAS DES ARCHES *INCOMPLÈTES*, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

24. Nous avons vu dans le numéro précédent qu'une des deux constantes e et μ_0 reste arbitraire dans les *arches incomplètes :* cela résultera avec évidence des calculs qui vont suivre. En général, on n'a aucune raison de se donner *a priori* l'épaisseur à la clef, ou en un joint quelconque, tandis qu'au contraire on est intéressé, dans le but d'économiser les matériaux, à utiliser leur résistance, à faire supporter à chaque joint la plus grande charge possible par unité de surface. Il est clair, en effet, qu'un joint devant résister à une charge totale déterminée, si la pression par unité de surface est inférieure à celle maximum que la pierre

ou le mortier pourraient supporter sans inconvénient, la surface du joint, et par suite, le volume du voussoir seront plus grands que si la pression par unité de surface était portée au maximum, la pression totale restant la même. Nous ajouterons, à ce sujet, une observation qui eût peut-être été mieux placée ailleurs, c'est que la condition que la résultante des pressions passe par le milieu de l'épaisseur est également favorable à la diminution de l'étendue des surfaces de joint; cela résulte de ce que la pression par unité de surface va en augmentant vers les extrémités de la surface de joint dont se rapproche la résultante des pressions : en effet, lorsqu'elle a atteint son maximum vers ces points, elle se trouve, dans les autres, plus ou moins au-dessous de ce maximum, et la pression totale devient moindre que pour un joint d'égale étendue dans lequel la résultante des pressions passerait par le milieu, et où la pression par unité de surface serait portée à la même valeur maximum que dans le premier. Donc, si la pression totale que supporte le premier est donnée, en faisant passer la résultante des pressions par le milieu du joint, on pourra réduire son étendue sans augmenter la pression maximum par unité de surface.

Ces considérations doivent engager les ingénieurs à adopter autant que possible les plus grandes valeurs des pressions par unité de surface dans les joints, ou de la quantité μ qui les représente. On pourra se donner généralement μ_1 *a priori*, pourvu qu'il n'excède pas 100 mètres suivant Navier, et l'on déduira μ_0 de l'équation (u'') que nous reproduisons en y joignant sa relation avec q^2 :

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_1 - f - i\,\frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}, \\ q^2 &= 2\,\frac{e\,\mu_0}{i}. \end{aligned}\right\} \quad (v'')$$

Disons cependant qu'on pourrait au besoin profiter de ce que la quantité μ_0 reste arbitraire pour l'assujettir à quelque condition particulière.

Il reste maintenant à déterminer e. Nous allons former une équation entre cette quantité, la flèche f et l'ordonnée du point inférieur de l'intrados, que nous désignerons par y''_1. Rappelons que l'intrados fictif et l'intrados réel sont distants de la quantité 2δ, différence entre l'épaisseur réelle ε et l'épaisseur fictive e, mesurée suivant la normale [voir équation (e)]. Il en résulte que la valeur de l'ordonnée du point inférieur de l'intrados réel est

$$y''_1 + 2\delta_1 \cos\alpha_1,$$

en désignant par l'indice 1 les quantités qui se rapportent à ce point. L'ordonnée du sommet de l'intrados réel est

$$h'' + 2\delta_0;$$

mais la différence de ces ordonnées est égale à la flèche f, d'où il suit que l'on a

$$f = y''_1 - h'' - 2\delta_0 + 2\delta_1 \cos\alpha_1:$$

mettant ici pour $2\delta_0$ et $2\delta_1$ leurs valeurs tirées de (x), et prenant la valeur de y''_1, il vient

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(h'' - y''_1 \cos\alpha_1).$$

Or le dernier terme du second membre étant du deuxième ordre, on peut y substituer à y''_1 et $\cos\alpha_1$ leurs expressions privées des termes du premier et du deuxième ordre. Remplaçant d'abord h'' par $y''_1 - f$, la parenthèse devient

$$y''_1(1 - \cos\alpha_1) - f;$$

mettant ensuite pour $1 - \cos\alpha_1$ sa valeur approchée $\frac{y_1''^2 - h''^2}{q^2}$ ou

$\frac{f(f+2k'')}{q^2}$, et $f+k''$ à la place de y''_1, l'expression précédente se réduit à

$$-f\left(1-\frac{(f+k'')(f+2k'')}{q^2}\right),$$

et il vient finalement

$$y''_1 = f + k'' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} f\left[1 - \frac{(f+k'')(f+2k'')}{q^2}\right]. \qquad (w'')$$

On pourra le plus souvent négliger le dernier terme de cette expression.

Soit de même x''_1 l'abscisse du point inférieur de l'intrados fictif, on aura évidemment

$$x''_1 = g + 2\delta_1 \sin\alpha_1,$$

et la valeur de $\sin\alpha_1$ dans cette équation pourra se déduire de celle de $1-\cos\alpha_1$ obtenue plus haut en négligeant les termes du premier et du deuxième ordre : nous aurons ainsi les deux relations

$$1-\cos\alpha_1 = \frac{f(f+2k'')}{q^2},$$

$$1+\cos\alpha_1 = 2 - \frac{f(f+2k'')}{q^2},$$

d'où, en multipliant membre à membre et extrayant ensuite les racines,

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{1-\cos^2\alpha_1} = \sqrt{\frac{f(f+2k'')}{q^2}\left[2-\frac{f(f+2k'')}{q^2}\right]}.$$

La première des deux équations précédentes donnerait d'ailleurs la valeur approchée de $\frac{1}{2}\alpha_1$, en l'écrivant comme il suit :

$$\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{f(f+2k'')}{2q^2}.$$

On a enfin

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f + h'').$$

La valeur ci-dessus de x''_1, en passant tous les termes dans le premier membre, donne l'équation de condition

$$x''_1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f + h'')\sqrt{\frac{f(f+2h'')}{q^2}\left[2 - \frac{f(f+2h'')}{q^2}\right]} - g = 0, \quad (x'')$$

dans laquelle le second terme sera le plus souvent négligeable.

C'est maintenant du système des équations (s'') jointes à (v''), (w'') et (x''), qu'il s'agit de tirer la valeur de l'inconnue e. On comprend l'impossibilité de l'élimination et la nécessité de recourir aux méthodes de tâtonnements ou d'approximations successives. On pourra y procéder, soit en s'aidant de tracés fondés sur l'expression (w) du rayon de courbure ρ'', soit au moyen des seuls calculs numériques. Voici, en nous en tenant pour le moment à ces derniers, comment il faudra s'y prendre : on attribuera à l'inconnue e une valeur hypothétique plus ou moins approchée, dont nous allons bientôt donner le moyen de fixer les limites; puis, s'étant donné μ_1 dans les limites indiquées plus haut, on calculera μ_0, q^2 et y''_1 par les équations (v'') et (w''); on calculera ensuite x'' par le système des équations (s'') dans lesquelles on fera $y'' = y''_1$, et l'on substituera cette valeur pour x''_1, dans le premier membre de l'équation (x'') qui devrait s'annuler, si la valeur hypothétique de e d'où l'on est parti se trouvait être égale à celle cherchée. Comme il n'en sera pas généralement ainsi, on fera varier ensuite cette quantité, et l'on recommencera les calculs, ce qui donnera, pour le premier membre de (x''), un résultat différent du précédent : une simple proportion suffira pour corriger en grande partie l'erreur de e; et, si l'on substitue la valeur qui a subi une première correction, on aura un troisième résultat déjà beaucoup plus voisin de zéro que les deux premiers. Enfin ces trois résultats fourniront un moyen de corriger la valeur de e au-

14.

tant qu'il est nécessaire, soit en employant les courbes d'erreurs, soit en ayant recours à tout autre procédé d'interpolation. (Nous avons indiqué un de ces procédés déduit du théorème de Taylor, au § XLVI de l'*Équilibre des voûtes en berceaux cylindriques*, troisième article.)

LIMITES DE LA VALEUR DE *e*, DANS LES ARCHES *INCOMPLÈTES*, DITES *EN ARC DE CERCLE* (*).

25. Nous obtiendrons une limite inférieure de la valeur de e, en partant de cette considération, que le rayon de courbure de l'intrados au sommet est plus grand que le rayon du cercle passant par les naissances et tangent à l'intrados en son sommet. Cette assertion se vérifie aisément : en effet, d'après l'équation (w) dans laquelle on fera, pour plus de simplicité, abstraction des termes du premier et du deuxième ordre, le rayon de courbure va en décroissant à partir du sommet de l'intrados. Or, si le rayon de courbure au sommet était égal à celui de l'arc tangent et passant par les naissances, la diminution du rayon de courbure ne permettrait pas à la courbe d'atteindre les naissances, et celle-ci serait embrassée par l'arc de cercle dont le rayon est constant; il en serait de même *a fortiori* si le rayon de courbure de l'intrados se trouvait au sommet être plus petit que le rayon de l'arc tangent. Donc, pour que l'intrados passe par les naissances, il faut que ce rayon de courbure au sommet excède le rayon de l'arc tangent. On peut conclure de là que l'intrados embrasse l'arc de cercle vers le sommet, et de ce qu'ils passent tous deux par les naissances, il résulte que l'angle de la tangente extrême à l'intrados, avec l'axe des x, excède celui de la tangente à l'arc de cercle

(*) *P. S.* Les Tables que nous donnons à la fin de la deuxième partie de ce Mémoire dispenseront de recourir aux formules proposées aux n°s 25 et 27 pour obtenir une valeur approchée de l'inconnue e, dans le cas de $i = 1$. Si le rapport i ne différerait pas trop de l'unité, la solution déduite des mêmes Tables serait une solution approchée qui dispenserait encore de l'emploi de ces formules.

avec le même axe, ou bien que la normale à l'extrémité de l'intrados fait avec l'axe des y un angle plus grand que celui de la normale au cercle menée par le même point. Cette dernière remarque fournit le moyen de fixer une limite supérieure de la valeur de e.

Dans les calculs relatifs à ces limites, nous regarderons les *intrados* réel et fictif comme se confondant en une même courbe, et nous négligerons les termes du deuxième ordre.

Soient ρ''_0 le rayon de courbure de l'intrados au sommet, et r celui du cercle tangent à l'intrados en ce point et passant par les naissances.

La première proposition s'exprime analytiquement par l'inégalité

$$\rho''_0 > r.$$

Or on a entre la flèche, la demi-ouverture et le rayon r, l'équation

$$g^2 = f(2r - f),$$

d'où l'on tire

$$2r = \frac{g^2 + f^2}{f};$$

d'un autre côté, si nous faisons $y'' = h'' = h + e$ et $\cos\alpha = 1$ dans l'équation (w), nous aurons

$$2\rho''_0 = \frac{q^2 - 2eh - \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}}{h + \frac{e}{i}}: \qquad (y'')$$

substituons ces valeurs dans l'inégalité $2\rho''_0 > 2r$ équivalente à la première, et pour q^2 sa valeur $2\frac{e\mu_0}{i}$, il viendra

$$2e\,\frac{\frac{\mu_0}{i} - h - \frac{2}{3}\frac{e}{i}}{h + \frac{e}{i}} > f\left(1 + \frac{g^2}{f^2}\right).$$

d'où

$$2e\left[\mu_0 - ih - \frac{2}{3}e - \frac{f}{2}\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)\right] > ihf\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right).$$

et, *a fortiori*,

$$2e\left[\mu_0 - ih - \frac{1}{2}f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)\right] > ihf\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right).$$

On en tire

$$e > ih\frac{f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}{2(\mu_0 - ih) - f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}. \qquad (z'')$$

Telle est la limite inférieure de e. Quant à la limite supérieure, elle se déduira de l'autre proposition, qu'on pourra traduire de cette manière : le cosinus de l'angle α_1 de la normale extrême à l'intrados avec l'axe des y, est plus petit que celui de la normale au cercle; or ce dernier cosinus a pour expression $\frac{r-f}{r}$ ou $1 - \frac{2f^2}{2fr}$; mais à cause de la valeur ci-dessus de $2r$ ou de $2rf$, la valeur de ce cosinus est $1 - \frac{2f^2}{g^2+f^2}$; on a donc l'inégalité

$$\cos\alpha_1 < 1 - \frac{2f^2}{g^2+f^2}.$$

Substituons à la place de $\cos\alpha_1$, sa valeur (u), en y mettant pour y'' la valeur y', donnée par l'équation (w''), puis $h+e$ à la place de h'', et négligeons les termes du deuxième ordre; il viendra

$$\frac{1 - \frac{f(f+2h)+2e(f+h)}{q^2}}{1 - \frac{2e}{q^2}\left(h - \frac{1-i}{i}f\right)} < 1 - 2\frac{1}{1+\frac{g^2}{f^2}},$$

ou, en développant et réduisant,

$$-\frac{f(f+2h)}{q^2} < \frac{2ef}{iq^2} - 2\frac{1}{1+\frac{g^2}{f^2}} + \frac{4e}{q^2}\frac{h - \frac{1-i}{i}f}{1+\frac{g^2}{f^2}}.$$

Cette inégalité sera vraie, à plus forte raison, si, pour simplifier, on supprime au dernier terme la quantité $\frac{1-i}{i}f$, qui sera positive dans les cas ordinaires de la pratique; multipliant ensuite tout par q^2 ou par sa valeur $2\frac{e\mu_0}{i}$, il viendra

$$e < \frac{i}{2}\,\frac{f(f+2h)\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}{2(\mu_0 - ih) - f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}, \qquad (a''')$$

inégalité qui donne la limite supérieure de la valeur de e. Cette limite et celle précédemment déterminée laissent entre elles un intervalle assez considérable : nous indiquerons, sans toutefois en garantir la généralité, un moyen de déduire de ces limites une valeur approchée de e; il consiste à doubler la limite inférieure, prendre la moitié de celle supérieure, et ensuite la moyenne des deux résultats, ce qui revient à ajouter à la limite inférieure le quart de la limite supérieure, ou à prendre pour valeur approchée de e, l'expression

$$\frac{\frac{i}{8}f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)(f+10h)}{2(\mu_0 - ih) - f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}.$$

Le calcul des valeurs limites ou de la valeur approchée de e, suppose qu'on a préalablement calculé μ_0 par la formule (v''), au moyen de la quantité donnée μ_1. La correction de la valeur approchée s'opère ainsi qu'il a été dit au numéro précédent.

CAS DES ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

26. Nous avons fait voir au n° 23 comment les deux conditions résultant d'une flèche et d'une demi-ouverture données, jointes à celle de la verticalité des tangentes extrêmes, suffisaient pour déterminer les deux constantes inconnues e et μ_1. Pour plus

de simplicité, nous substituerons à l'inconnue μ_0 la quantité q^2, liée à celle-ci par la relation

$$q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i},$$

de sorte qu'ayant déterminé q^2 et e, on déduira de cette équation la valeur de μ_0.

Nous exprimerons d'abord que la tangente extrême à l'intrados *réel* est verticale. Pour cela, observons que l'abscisse d'un point quelconque de cette courbe a pour expression

$$x'' - 2\delta \sin\alpha;$$

nous aurons donc aux naissances de cet intrados,

$$d(x'' - 2\delta \sin\alpha) = 0,$$

d'où

$$\frac{dx''}{dy''} - \sin\alpha \frac{d.2\delta}{dy''} - 2\delta \cos\alpha \frac{d\alpha}{dy''} = 0.$$

Or nous avons, par l'une des équations (x),

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'';$$

on en tire

$$\frac{d.2\delta}{dy''} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = \frac{2\delta}{y''}.$$

D'un autre côté, l'on a

$$\frac{dx''}{dy''} = \cot\alpha, \quad d\alpha = \frac{ds''}{\rho''}, \quad \frac{d\alpha}{dy''} = \frac{1}{\rho''}\frac{ds''}{dy''} = \frac{1}{\rho''\sin\alpha};$$

substituant ces valeurs, il vient

$$\cot\alpha - \frac{2\delta}{y''}\sin\alpha - \frac{2\delta}{\rho''}\cot\alpha = 0,$$

ou

$$1 - \frac{2\delta}{y''}\sin\alpha \operatorname{tang}\alpha - \frac{2\delta}{\rho''} = 0,$$

et, par suite,

$$\sin\alpha \operatorname{tang}\alpha = \frac{y''}{2\delta}\left(1 - \frac{2\delta}{\rho''}\right).$$

Il y aurait à substituer à 2δ, α et ρ'', leurs valeurs en fonctions de y'', et à tirer la valeur de cette ordonnée; mais nous opérerons plus simplement. L'équation précédente montre que le produit $\sin\alpha \tang\alpha$ est très-grand, ou que α est voisin de 90°, comme on pouvait le prévoir. Cette circonstance permet de faire $\sin\alpha = 1$ et de négliger $\frac{2\delta}{\rho''}$ devant l'unité au deuxième membre : on a alors

$$\tang\alpha = \frac{y''}{2\delta}.$$

Éliminant $\tang\alpha$ entre cette équation et l'équation (a'), il viendra

$$\frac{y''}{2\delta} = \frac{R}{q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2},$$

ou bien en affectant de l'indice 1, les variables de cette expression qui répondent aux naissances de l'intrados *réel*, et prenant la valeur du dénominateur du second membre,

$$q^2 + (h'' - e)^2 - y_1''^2 = \frac{2\delta_1}{y''_1} R_1.$$

Désignons actuellement par y''_2 l'ordonnée du point de l'intrados *fictif* où la tangente est verticale, et pour lequel on a $\cot\alpha = 0$, la même équation (a') fournira la relation

$$y_2''^2 = q^2 + (h'' - e)^2,$$

ou, à cause de $h'' - e = h$,

$$y_2''^2 = q^2 + h^2.$$

Cette valeur permet de mettre l'équation précédente sous la forme

$$y_2''^2 - y_1''^2 = \frac{2\delta_1}{y''_1} R_1,$$

d'où

$$y''_2 - y''_1 = \frac{2\delta_1 R_1}{y''_1 (y''_2 + y''_1)}.$$

La différence des ordonnées des points de l'intrados *fictif* correspondants aux tangentes verticales des deux intrados est, comme on le voit, une quantité du deuxième ordre, ce qui permet de substituer dans le second membre y''_2, δ_2 et R_2 à y''_1, δ_1 et R_1, puis à ces quantités, leurs valeurs en y négligeant les termes du premier ordre; de cette manière, on a d'abord

$$y''_2 - y''_1 = \frac{\delta_2}{y''_2} R_2.$$

Actuellement, la valeur (z) de R^2 devient

$$R_2^2 = (y''^2_2 - h''^2)(2q^2 - y''^2_2 + h''^2),$$

et, en ayant égard à la valeur de y''^2_2,

$$R_2^2 = [q^2 - (h''^2 - h^2)][q^2 + h''^2 - h^2],$$

ou

$$R_2^2 = q^4 - (h''^2 - h^2)^2;$$

mais à cause de $h'' - h = e$, le dernier terme de cette expression est du deuxième ordre, ce qui la réduit à q^4. Substituant cette valeur et celle de δ_2 dans la différence ci-dessus, il vient

$$y''_2 - y''_1 = \frac{1}{6}\frac{e^2}{y''_2},$$

ou, à cause de $y''^2_2 = q^2 + h^2$,

$$y''_2 - y''_1 = \frac{1}{6}\frac{e^2}{\sqrt{q^2 + h^2}}.$$

On en déduit finalement

$$y''_1 = \sqrt{q^2 + h^2} - \frac{1}{6}\frac{e^2}{\sqrt{q^2 + h^2}}.$$

Quant à l'angle $(90^\circ - \alpha_1)$ du dernier joint avec l'horizontale,

il se déduira de la valeur de tang α obtenue plus haut, et l'on aura

$$\text{tang}\,(90^\circ - \alpha_1) = \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}.$$

Maintenant nous allons faire usage d'une autre expression de y''_1, que nous avons formée pour le cas des *arches incomplètes;* elle est

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}\,(h'' - y''_1 \cos\alpha_1):$$

or l'expression de tang α donne $y''_1 \cos\alpha_1 = 2\,\delta_1 \sin\alpha_1$; cette valeur n'introduirait dans y''_1 qu'un terme du quatrième ordre, nous devons donc n'en tenir aucun compte, de sorte que la valeur précédente se réduit à

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}\,h''.$$

Il s'agit actuellement d'éliminer y''_1 entre cette équation et celle obtenue plus haut qui exprime la valeur de la même quantité. Cette dernière donne, en négligeant les termes du quatrième ordre,

$$y_1''^2 = q^2 + h^2 - \frac{1}{3}\,e^2. \qquad (c'')$$

Élevons la précédente au carré et éliminons $y_1''^2$, il viendra

$$q^2 + h^2 - \frac{1}{3}\,e^2 = (f + h'')^2 + \frac{2}{3}\,h''\,(f + h'')\,\frac{e^2}{q^2};$$

on en tire, à cause de $h = h'' - e$,

$$q^2 = f(f + 2\,h'') + 2\,h''\,e - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h''\,(f + h'')}{q^2}\right)e^2,$$

et en mettant au dernier terme, pour q^2, sa valeur approchée $f(f + 2\,h'')$,

$$q^2 = f(f + 2\,h'') + 2\,h''\,e - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h''\,(f + h'')}{f(f + 2\,h'')}\right)e^2. \qquad (d'')$$

Il reste à former l'équation qui lie la flèche f à la demi-ouverture g : on a ici, comme dans les *arches incomplètes*,

$$x''_1 = g + 2\,\delta_1 \sin\alpha_1,$$

et nous avons vu qu'on peut faire $\sin\alpha_1 = 1$, tandis que l'on a

$$2\,\delta_1 = \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}\,y''_1.$$

Substituons à y''_1 et q^2, leurs valeurs approchées $f + h''$ et $f(f + 2h'')$, il viendra

$$2\,\delta_1 = \frac{1}{3}\,\frac{f + h''}{f(f + 2h'')}\,e^2,$$

et l'on aura l'équation de condition

$$x''_1 - \frac{1}{3}\,\frac{f + h''}{f(f + 2h'')}\,e^2 - g = 0. \qquad (e'')$$

La détermination des constantes e et q^2 dépend maintenant de la résolution du système des équations (d'''), (e'') et (c''') jointes aux équations (s'') dans lesquelles on fera $y'' = y_1''$ et $x'' = x''_1$. L'élimination ne sera pas plus praticable ici que dans l'autre cas; on sera encore réduit à l'emploi des méthodes de tâtonnement, et voici comment on devra s'y prendre :

On partira d'une valeur hypothétique de e plus ou moins approchée, que nous ferons bientôt connaître; puis, au moyen de l'équation (d''') dans laquelle on a $h'' = h + e$, on calculera la valeur correspondante de q^2. Celle de y''_1 sera donnée par l'équation (c''') ou celle qui la précède, et l'on se servira de cette valeur particulière de y'' pour calculer, au moyen des équations (s''), celle correspondante de x'' qui deviendra x''_1 : cette valeur devra être portée dans l'équation de condition (e'') qui pourra n'être pas satisfaite. Il faudra alors avoir recours aux méthodes de correction indiquées à la fin du n° 24, pour corriger la valeur de e d'où l'on est parti, et recommencer les calculs jusqu'à ce qu'on en ait dé-

terminé une qui satisfasse à l'équation (e'''). Toutefois, il ne faut pas oublier que la valeur de μ_1 ne doit pas dépasser certaines limites dont il a été question au n° 23. On devra donc, après avoir obtenu les valeurs de e et q' qui satisfont à l'ensemble des équations du problème, calculer la valeur de μ_0 par l'équation

$$\mu_0 = \frac{iq'}{2e}, \qquad (f''')$$

et en déduire celle de μ_1 par l'équation (t'') que nous reproduisons ici,

$$\mu_1 = \mu_0 + f + i\,\frac{f(f + 2h'')}{3\mu_0}, \qquad (g''')$$

ou de la suivante qu'on obtient en éliminant μ_0 et q' entre celle-ci et les équations (d''') et (f'''),

$$\mu_1 = i\,\frac{f(f + 2h'')}{2e} + ih'' + f + \frac{1}{3}\left(2 - i + \frac{ih''(f + h'')}{f(f + 2h'')}\right)e. \qquad (h''')$$

En changeant h'' en $h + e$ dans les deux premiers termes, cette expression devient

$$\mu_1 = i\,\frac{f(f + 2h)}{2e} + i(f + h) + f + \frac{1}{3}\left[2(1 + i) + \frac{ih''(f + h'')}{f(f + 2h'')}\right]e.$$

Le dernier terme est très-petit, lors même que e atteint quelques mètres; il suffit, pour cette raison, de considérer les seuls premiers termes dans la discussion de la valeur de μ_1 : on reconnaît ainsi que cette grandeur μ_1 est d'autant moindre que e devient plus grand. Si donc la valeur trouvée de e est très-grande relativement, et qu'il en résulte une valeur assez petite de μ_1 ou de faibles pressions dans les joints, ce qui serait contraire aux principes de l'économie dans les constructions, on en conclura la nécessité de modifier les données. Du reste, nos formules basées sur l'hypothèse que e et μ sont l'un petit et l'autre très-grand cesseraient d'être applicables.

VALEUR APPROCHÉE DE e DANS LE CAS DES *ARCHES COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

27. La discussion qui nous a servi, n° 25, à fixer les deux limites de e, dans le cas des arches *incomplètes*, pourrait être reproduite ici; mais ce serait sans application utile à notre objet. En effet, si nous voulions appliquer les deux propositions sur lesquelles nous nous sommes appuyé pour arriver aux deux inégalités (z'') et (a'''), nous devrions, dans les calculs qui les précèdent, remplacer q^2 par sa valeur (d''') en e, et nous obtiendrions, au lieu de l'inégalité (z'') qui donne une limite inférieure, l'expression d'une limite supérieure fort éloignée de la vraie valeur de e, et telle que nous pourrons, en partant d'autres considérations, obtenir une autre expression de la limite supérieure dont la valeur sera exactement moitié moindre.

Quant à la condition qui nous a fourni l'autre limite, et qui est exprimée par l'inégalité

$$\cos\alpha_1 < 1 - \frac{2f^2}{g^2+f^2},$$

à cause que $\cos\alpha_1$ est ici égal à zéro, elle se réduit à

$$\frac{2f^2}{g^2+f^2} < 1,$$

ou à

$$\frac{f}{g} < 1. \qquad (\iota'')$$

Cette condition, relative aux données seulement, ne peut rien fournir qui soit relatif aux limites de la valeur de e; elle conduit à cette conséquence remarquable, que les arches chargées doivent toujours être surbaissées.

Nous ne nous proposons ici que de donner une limite supé-

rieure de la valeur de e qui ne différera pas considérablement de la valeur exacte. Il résulte de la comparaison de nombreux tracés de notre courbe intrados avec des demi-ellipses ayant pour demi-axes les longueurs f et g, que l'intrados présente toujours plus de convexité vers les reins que la demi-ellipse correspondante, et que, par suite, il embrasse complétement cette dernière depuis le sommet jusqu'aux naissances. Cette circonstance indique que le rayon de courbure de l'ellipse au sommet est plus petit que celui de la courbe intrados au même point; écrivons cette inégalité, en mettant pour le rayon de courbure de l'ellipse son expression connue $\frac{g^2}{f}$, et pour le rayon de courbure de l'intrados, sa valeur ρ'', tirée de (y''), nous aurons

$$\frac{g^2}{f} < \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh - \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}}{h + \frac{e}{i}}.$$

Substituons pour q^2, sa valeur (d'''), et faisons disparaître le dénominateur du second membre; il viendra, à cause de $h'' = h + e$,

$$2\left(\frac{e}{i} + h\right)\frac{g^2}{f} < f^2 + 2fh + 2fe - \frac{2}{3}\left(2\,\frac{1-i}{i} - \frac{h''}{f}\,\frac{(f+h'')}{(f+2h'')}\right)e^2 :$$

or, i étant < 1, on peut le remplacer par l'unité, dans le premier membre, ce qui augmentera l'inégalité. On peut aussi négliger le terme en e^2 dans le second membre; car le facteur de e^2 est très-petit, d'abord parce que $1 - i$ et le rapport $\frac{h''}{f}$ sont très-petits, ensuite parce que les deux petits termes où entrent ces quantités sont de signes contraires et tendent à se détruire : on pourra donc écrire

$$2(e+h)\,\frac{g^2}{f} < f^2 + 2(e+h)\,f,$$

ou

$$2(e+h)\left(\frac{g^2}{f^2}-1\right)<f,$$

et l'on en déduit

$$e+h<\frac{1}{2}\frac{f}{\frac{g^2}{f^2}-1}. \qquad (j''')$$

L'élimination de q^2 entre l'équation (d'') et l'inégalité (z'') eût conduit à une limite supérieure de $e+h$, double de celle que nous venons de déterminer. On peut obtenir une valeur approchée de $e+h$ en prenant les $\frac{4}{5}$ de la valeur limite donnée par l'inégalité (j''') (nous donnons cette indication comme ressortant de nombreux calculs et tracés); on pourra même en faire usage pour se former une idée approchée des dimensions auxquelles on arrivera au moyen de valeurs données de f, g et h. La correction de la valeur de e s'effectuera comme il a été dit au n° 26 (*).

S'il nous est permis de raisonner sur la valeur approchée de e, comme si elle était exacte, nous dirons que l'épaisseur augmente avec la flèche et aussi avec le rapport $\frac{f}{g}$, c'est-à-dire avec f, lorsque

(*) N. B. Les Tables qui sont à la fin du Mémoire nous ont permis de rechercher ultérieurement des formules empiriques pour calculer l'épaisseur à la clef e_1, dans le cas des arches *complètes* où l'on a $i=1$. Nous avons trouvé, pour les surbaissements usités qui sont compris entre les limites $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$:

$$e_1+h=\frac{0,79876\,f-0,22864\,g}{\frac{g^2}{f^2}-1}, \text{ à } \frac{1}{430} \text{ près};$$

$$e_1+h=\frac{f}{\frac{g^2}{f^2}-1}\left(0,92241-0,19839\frac{g}{f}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ à } \frac{1}{1440} \text{ près}.$$

g reste constant, et nous ajouterons que lorsqu'on aura trouvé e et μ_1, l'un évidemment trop grand et l'autre beaucoup au-dessous de la limite 100 mètres par exemple, il faudra, pour diminuer e et augmenter μ_1, diminuer la flèche, ce qui augmentera en même temps le surbaissement ; il n'y aura aucune difficulté à le faire, puisqu'il suffira, d'exhausser les naissances, pour avoir la même hauteur de la clef au-dessus des eaux. Si l'épaisseur était évidemment trop petite et donnait lieu par conséquent à de très-grandes valeurs de μ_1, ce serait l'indication d'un trop grand surbaissement, ou de trop petites valeurs de f; il serait moins facile de remédier à cet inconvénient.

Ces considérations montrent que les arches *en anse de panier* se prêtent plus difficilement aux conditions qu'on peut vouloir leur faire remplir, que les arches *incomplètes ;* cela tient à ce que, dans les premières, tout se trouve déterminé au moyen des données, au lieu que, dans celles-ci, l'une des deux constantes reste arbitraire. Il ne faudra donc point s'étonner si nos formules relatives aux arches *en anse de panier* conduisent quelquefois à des valeurs de e et μ_1 inadmissibles dans la pratique.

La deuxième partie du Mémoire présentera des exemples propres à mettre en évidence les effets produits par la variation des données. Nous ne pouvions ici que les indiquer sommairement.

POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF CONTRE LES CULÉES.

28. Nous n'aurons que peu de mots à dire concernant les piles. En admettant que le pont se compose d'arches égales, on voit que les poussées horizontales exercées au sommet des piles se font équilibre, et que chaque pile doit résister à une action verticale égale à la somme des composantes verticales des pressions exercées sur les joints des naissances des deux arches contiguës, augmentée du poids de la partie du massif qu'elle supporte directement.

Désignons par T_1 la valeur de la pression totale T dans le plan des naissances, et soit toujours λ la longueur de la voûte

parallèlement aux génératrices; on aura T_1 par l'équation (k) ou celle qui suit :

$$T_1 = \varpi \lambda e \mu_1; \qquad (k''')$$

la valeur de μ_1 sera donnée *a priori* dans le cas des arches *incomplètes*, et par l'équation (h''') dans le cas des arches *complètes*. Les composantes horizontale et verticale de cette pression seront

$$T_1 \cos\alpha_1, \quad T_1 \sin\alpha_1, \qquad (l''')$$

et l'on déduira la valeur de l'angle α_1, de l'expression de la tangente $\frac{dy''}{dx''}$, qui devient, en vertu de (a') et (d'),

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sqrt{(y''_1 - h'')\left[y''_1 + h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right]\left[\Theta^2 - \left(y''_1 - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]}}{q^2 + (h'' - e)^2 - y_1''^2}, \quad (m''')$$

après qu'on y aura mis pour y''_1, sa valeur (w'') dans le cas des arches *incomplètes* : dans le cas des *anses de panier*, on a

$$\operatorname{tang}(90^\circ - \alpha_1) = \frac{ie}{6\mu_1} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}.$$

La somme des projections verticales des pressions exercées par les deux arches voisines sur une même pile, est généralement

$$2\,T_1 \sin\alpha_1.$$

Maintenant supposons que les plans de joint extrêmes des deux voûtes se rencontrent suivant les arêtes extrêmes des extrados, de sorte que la pile n'ait à supporter directement aucune partie du massif; la section horizontale de la pile sera égale à la somme des projections horizontales des surfaces de joint passant par les naissances; elle aura pour expression

$$2\,\lambda e \sin\alpha_1$$

En divisant la somme des pressions verticales par cette section, on aura pour valeur de la pression par unité de surface que supportera la pile à sa partie supérieure,

$$\frac{T_1}{\lambda e},$$

ou, d'après l'équation (k'''),

$$\varpi \mu_1.$$

Dans cette hypothèse, on voit que la pression par unité de surface transmise verticalement à la pile sera précisément celle qui a lieu dans le plan des naissances; de sorte que si les assises de la pile présentent la même résistance que les voussoirs inférieurs, il suffira de donner à la pile, lorsqu'on n'aura égard qu'à la charge supérieure, une section horizontale égale à la somme des projections des plans de joint extrêmes.

S'il existe un intervalle horizontal entre les deux arêtes extérieures des deux derniers plans de joint, la pile aura à supporter directement une partie du poids du massif qui donnera lieu à une pression par unité de surface de beaucoup inférieure à $\varpi\mu_1$, de sorte qu'on pourra évidemment donner à la pile toute largeur qui ne sera point inférieure à la somme des projections horizontales des épaisseurs extrêmes, lorsqu'il suffira d'avoir égard à la charge supérieure.

Quant aux culées, elles sont d'abord soumises à l'action de la force totale T_1 [équation (k''')], faisant l'angle α_1 avec l'axe des x; les coordonnées de son point d'application sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x''_1 + \tfrac{1}{2}\, e \sin\alpha_1, \\ y_1 &= y''_1 - \tfrac{1}{2}\, e \cos\alpha_1; \end{aligned}\right\} \quad (n''')$$

mais les culées reçoivent en outre les actions horizontales exercées par le massif qu'elles encaissent. Pour déterminer la résul-

tante de ces actions et son point d'application, nous aurons recours à la relation (o) obtenue au n° 8, laquelle est

$$H' = i\varpi y',$$

H' désignant la pression horizontale par unité de surface exercée par les prismes triangulaires sur les parties adjacentes du massif. L'équilibre de celui-ci exige que la culée exerce des réactions égales et opposées. La pression transmise à la culée sur une étendue superficielle verticale $\lambda dy'$ située à la profondeur y', est donc

$$i\varpi\lambda y' dy',$$

et son moment

$$i\varpi\lambda y'^2 dy',$$

le tout, comme dans l'hypothèse de la fluidité.

Pour obtenir les valeurs de la résultante et de son moment, il suffit d'intégrer ces expressions entre des limites qui sont les ordonnées du sommet et du point inférieur de l'extrados : soient y'_0 et y'_1 ces ordonnées, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= h, \\ y'_1 &= y''_1 - e\cos\alpha_1. \end{aligned}\right\} \quad (o'')$$

Intégrons maintenant les expressions différentielles précédentes et désignons par U et a l'intensité de la résultante et l'ordonnée de son point d'application, il viendra

$$U = \frac{i\varpi\lambda}{2}\left(y_1'^2 - y_0'^2\right), \qquad (p'')$$

$$Ua = \frac{i\varpi\lambda}{3}\left(y_1'^3 - y_0'^3\right);$$

et l'on en déduira, par division membre à membre,

$$a = \frac{2}{3}\,\frac{y_1'^3 - y_0'^3}{y_1'^2 - y_0'^2},$$

résultat qu'on mettra sous la forme

$$u = \frac{2}{3} \frac{y'^2_0 + y'_0 y'_1 + y'^2_1}{y'_0 + y'_1}, \qquad (q''')$$

afin de faire disparaitre l'indétermination qui se manifesterait dans le cas où la différence de niveau $y'_1 - y'_0$ serait très-petite.

La partie de la culée située au-dessus du plan des naissances devra être construite d'après les mêmes principes que les murs de réservoirs, pour résister aux pressions élémentaires dont la force U se compose, à cela près qu'il faudra substituer la densité du massif à celle de l'eau et tenir compte de la pression représentée par la hauteur h qui s'exerce au niveau du sommet de l'extrados.

Connaissant maintenant les forces T_1 et U, leurs directions, et les coordonnées de leurs points d'application, on aura toutes les indications que la théorie abstraite de l'équilibre de la voûte et de son massif peut fournir, pour procéder au calcul de l'établissement des culées.

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ETC.

29. Ayant déterminé par les procédés indiqués aux n°s 22 et suivants, les valeurs des constantes e, μ, ou q^2, les coordonnées des points extrêmes de l'intrados seront connues : on se trouvera dès lors en mesure de procéder au calcul des coordonnées intermédiaires et des diverses quantités qui leur correspondent; on aura en même temps un moyen de vérifier l'exactitude des calculs, si l'on emploie la méthode des différences finies, comme nous allons le faire. Il est facile de se figurer quelle difficulté il y aurait à calculer, au moyen des formules (s''), l'abscisse x'' en fonction de l'ordonnée y'' qu'on se donnerait arbitrairement; en admettant qu'on fît ce calcul, il resterait à faire celui de l'inclinaison des joints, par l'équation différentielle (a'). Le moyen que nous allons indiquer, fondé sur l'emploi du rayon de courbure, aurait pu nous dispenser, à la rigueur, d'effectuer l'intégration des

équations différentielles du problème, mais la détermination des constantes aurait présenté plus de difficultés.

Nous allons nous proposer d'abord de calculer les différences finies des coordonnées de la courbe intrados, en prenant pour variable indépendante l'angle α des normales avec la verticale: nous ferons varier α de quantités constantes que nous désignerons par $\Delta\alpha$, et les coordonnées x'', y'' du point où la normale fait l'angle α varieront de quantités $\Delta x''$, $\Delta y''$ qu'il s'agit de déterminer. Nous ne prétendons point donner l'expression exacte de ces différences, mais seulement des expressions dont le degré d'approximation sera d'autant plus grand que la différence $\Delta\alpha$ sera elle-même plus petite. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'on veuille tenir compte, dans les valeurs de $\Delta x''$ et $\Delta y''$, des termes du deuxième ordre ou en e^2, afin qu'on soit sûr que les valeurs de x'' et y'' obtenues par les additions successives des $\Delta x''$ et $\Delta y''$ ne soient point en erreur dans les termes du premier ordre : il faudra, pour simplifier les calculs, choisir $\Delta\alpha$ de telle sorte que les termes en $\Delta\alpha$ soient, ainsi que ceux en $\Delta x''$ et $\Delta y''$, de l'ordre de e ou du premier ordre. La différence $\Delta\alpha$ sera assez petite quand elle n'excédera pas de beaucoup le rapport $\frac{e}{q}$ qui s'est présenté au commencement de nos calculs comme type des quantités du premier ordre.

Ceci posé, nous déduirons les expressions de $\Delta x''$, $\Delta y''$, de celles des différentielles dx'' et dy'', en mettant à profit une proposition duè, nous le croyons, à Legendre, et qu'on peut énoncer de cette manière : Si dans un système d'équations différentielles du premier ordre, on change les différentielles en différences finies, on peut donner au résultat un degré d'exactitude qui s'étende aux termes du deuxième ordre inclusivement, en augmentant en même temps chaque variable dépendante ou indépendante de la moitié de sa différence finie.

Appliquons cette proposition aux valeurs suivantes de dx'' et dy'',

$$dx'' = \rho'' \cos\alpha \, d\alpha, \qquad dy'' = \rho'' \sin\alpha \, d\alpha,$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\Delta x'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,\\ \Delta y'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.\end{aligned}\right\} (r'')$$

Or, observons qu'en présence du facteur $\Delta\alpha$, l'expression $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ n'a besoin d'être exacte que jusqu'aux termes du premier ordre inclusivement; nous déduirons cette expression de celle (w) du rayon de courbure ρ'', en mettant cette dernière sous la forme

$$\rho'' = \psi(y'', \alpha),$$

et désignant par ψ une fonction des deux quantités y'' et α. Différentions cette expression, il viendra

$$d\rho'' = \frac{d\psi}{dy''}dy'' + \frac{d\psi}{d\alpha}d\alpha;$$

si nous passons des différentielles aux différences finies, et que nous divisions tout par 2, nous aurons, aux quantités près du deuxième ordre,

$$\frac{1}{2}\Delta\rho'' = \frac{d\psi}{dy''}\frac{\Delta y''}{2} + \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{\Delta\alpha}{2};$$

ajoutons maintenant, membre à membre, cette équation et celle qui donne la valeur de ρ'', il viendra

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \psi(y'', \alpha) + \frac{d\psi}{dy''}\frac{\Delta y''}{2} + \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{\Delta\alpha}{2};$$

mais, en vertu du théorème de Taylor, et en négligeant les termes du deuxième ordre, cette expression équivaut à

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \psi\left(y'' + \frac{1}{2}\Delta y'', \alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right). \quad (*)$$

(*) Nous aurions évité ce tour de démonstration en appliquant immédiatement la proposition de Legendre aux expressions de dx'' et dy'', mises sous la forme

$$\psi(y'', \alpha)\,{\cos \atop \sin}\,\alpha\, d\alpha.$$

Pour faire usage de cette formule dans le calcul des valeurs de $\Delta x''$ et $\Delta y''$, reprenons la valeur de ρ'' équation (w), que nous écrirons comme il suit :

$$\rho'' = \frac{\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{i}h''e + \frac{2}{3i}e^2 + \frac{1-i}{i}ey'' - \left(\frac{4}{3i}-1\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha}. \qquad (s'')$$

En vertu de la formule précédente et de la définition de la fonction ψ, nous aurons

$$\rho''+\frac{1}{2}\Delta\rho''=\frac{\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{i}h''e+\frac{2}{3i}e^2+\frac{1-i}{i}e\left(y''+\frac{1}{2}\Delta y''\right)-\left(\frac{4}{3i}-1\right)e^2\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}{y''+\frac{1}{2}\Delta y''+\frac{1-i}{i}e\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}. \quad (t'')$$

Cette expression, qui contient plusieurs termes constants, se simplifiera notablement dans l'hypothèse $i=1$; mais, quoi qu'il en soit, elle renferme encore l'inconnue $\frac{1}{2}\Delta y''$: rappelons à cet égard qu'il suffit ici d'étendre l'exactitude aux termes du premier ordre, d'où il suit qu'on peut substituer à $\frac{1}{2}\Delta y''$, sa valeur obtenue à ce degré d'approximation ; nous écrirons de cette manière

$$\frac{1}{2}\Delta y'' = \rho'' \sin\alpha \frac{\Delta\alpha}{2}, \qquad (u'')$$

et ce sera cette valeur dont il faudra faire usage dans la formule (t'').

Résumons ces diverses opérations.

Après avoir fait choix d'un intervalle $\Delta\alpha$, d'après les principes énoncés plus haut, et avoir exprimé en *rapport d'arc au rayon* cette quantité qui répondra à un petit nombre de degrés tel que 2°, 3° ou 4°, on disposera un tableau par colonnes verticales en tête desquelles on écrira les diverses valeurs de α qui seront équi-

distantes; deux lignes horizontales seront réservées pour inscrire les valeurs de y'' et x'' (celles de ces valeurs que l'on connait tout d'abord répondent à $\alpha = 0$, elles sont $h'' = h + e$ et zéro); on écrira ensuite les logarithmes de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, puis de $\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$ et $\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$: au moyen des valeurs inscrites dans la première colonne verticale, on calculera ρ'' par la formule (s''), et $\frac{1}{2}\Delta y''$ par la formule (u''); il sera facile ensuite de calculer $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ par la formule (t''), et les équations (r'') feront connaître $\Delta y''$ et $\Delta x''$. On inscrira ces diverses valeurs au fur et à mesure; puis, en ajoutant $\Delta y''$ à la valeur de y'' inscrite en tête de la colonne, et de même $\Delta x''$ à x'', on aura les valeurs de y'' et x'' qui devront être inscrites en tête de la colonne suivante. La vérification des calculs contenus dans deux colonnes verticales consécutives s'obtiendra en prenant la moyenne arithmétique des deux valeurs de ρ'', et comparant cette moyenne à la valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ qui répond à la première des deux colonnes. Si les calculs sont exacts, ces deux résultats devront être sensiblement égaux.

On continuera de la sorte jusqu'à ce qu'on ait dépassé les valeurs de y''_1 et x''_1, dont l'une aura été employée dans le calcul des formules (s''), et l'autre en sera résultée. Par interpolation, on pourra déduire des nombres contenus dans le tableau, la valeur de x'' correspondante à $y'' = y''_1$; et, si l'on a bien opéré, cette valeur devra coïncider avec x''_1, sauf quelque légère différence provenant de l'accumulation des erreurs dues aux termes du troisième ordre qu'on a négligés, en supposant que $\Delta\alpha$ ait été pris assez petit.

Les calculs étant vérifiés, on pourra compléter le tableau par la détermination des coordonnées de l'intrados réel et de l'extrados et des épaisseurs.

Le calcul des coordonnées de l'extrados se fera par les formules

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$
$$x' = x'' + e\sin\alpha.$$

La distance des deux intrados, suivant la normale à l'intrados fictif, est donnée par la double formule

$$2\delta = \frac{i}{6}\,\frac{e}{\mu_0}\,y'' = \frac{1}{3}\,\frac{e^3}{q^3}\,y''.$$

On en déduit, pour les ordonnées et abscisses Y et X de l'intrados réel, les deux expressions

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha, \quad X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

Enfin les épaisseurs seront données par la formule

$$\varepsilon = e + 2\delta.$$

Ces divers calculs sont de la plus grande simplicité, et les valeurs obtenues étant réunies aux précédentes, il en résultera un ensemble propre à représenter complétement la forme et les dimensions de l'arche parvenue à son état permanent. Le problème que nous nous étions posé se trouve dès lors complétement résolu sous le rapport analytique et sous celui des applications numériques : quelques mots nous suffiront pour indiquer l'usage qu'on peut faire des procédés graphiques, dans le but d'éviter l'emploi des formules (s''), quand on n'a pas en vue une exactitude supérieure à celle que l'on peut obtenir en ayant recours aux tracés.

SOLUTION DU PROBLÈME AU MOYEN DES PROCÉDÉS GRAPHIQUES.

30. La solution que nous allons donner dépend de la construction de la courbe intrados au moyen de son rayon de courbure. Il n'entre pas dans notre intention d'expliquer ici comment on trace une courbe dont le rayon de courbure est donné en fonction des coordonnées; chacun sait comment on peut remplacer un petit arc de la courbe par un arc de cercle d'une petite amplitude décrit avec le rayon de courbure correspondant au point milieu de cet arc. Nous renverrons, quant aux précautions à prendre lorsqu'on donne aux arcs une certaine amplitude, à ce que nous avons

dit sur ce sujet, dans le troisième article de notre Théorie de l'équilibre des voûtes, § XXXVI. Pour que les procédés indiqués dans cet article s'appliquent au cas actuel, il nous suffira de donner une construction du rayon de courbure : nous transformerons son équation (w), en posant

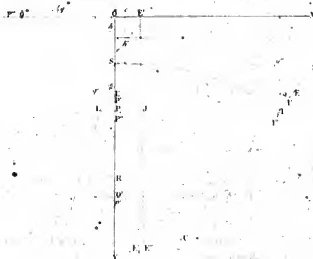
$$q' = q - \frac{2e}{q}h'' + \frac{4}{3}\frac{e^2}{iq},$$

$$\tang\beta = 2\frac{1-i}{i}\frac{e}{q}, \quad a = \frac{2}{i}\left(\frac{4}{3} - i\right)\frac{e^2}{q}, \quad b = \frac{1-i}{i}e,$$

et l'équation (w) deviendra

$$\rho'' = \frac{1}{2}q\,\frac{q' + (y'' - h'')\tang\beta - a\cos\alpha}{y'' + b\cos\alpha}.$$

Pour construire cette expression, ayant mené deux axes OX, OY,



l'un horizontal, l'autre vertical, on fixera le sommet de l'intrados sur l'axe des y, à la distance $\overline{OS} = h'' = h + e$; par le point S on mènera la droite SB faisant l'angle $\widehat{BSY} = \beta$; on prendra ensuite sur le prolongement de OX une distance $\overline{OQ} = \frac{1}{2} q$, et sur OY, $\overline{OQ'} = q'$: cette partie des constructions servira pour tous les rayons de courbure. Nous supposerons, pour plus de généralité, la construction de l'intrados fictif parvenue en un point I par lequel est menée la normale IN. Prenons sur cette normale les distances $\overline{II'} = a$, vers l'extrados; $\overline{II''} = b$, dans le sens opposé. Projetons les trois points I, I', I'' sur l'axe des y, et soient P, P', P'' leurs projections; nous aurons $\overline{OP} = y''$, $\overline{PP'} = a \cos\alpha$, $\overline{PP''} = b \cos\alpha$, et, par suite,

$$\overline{OP''} = y'' + b \cos\alpha.$$

Actuellement, prolongeons la droite IP jusqu'à sa rencontre avec la droite BS en L, nous aurons $\overline{PL} = (y'' - h'') \operatorname{tang}\beta$; rabattons le point L en L' sur la droite OY, de sorte qu'on ait $\overline{PL'} = \overline{PL}$, il viendra

$$\overline{P'L'} = \pm [(y'' - h'') \operatorname{tang}\beta - a \cos\alpha],$$

suivant que l'on aura $\overline{PL'} \gtrless \overline{PP'}$: pour former le numérateur de la fraction qui multiplie $\frac{1}{2} q$, dans la valeur de ρ'', il reste à ajouter avec le signe convenable la quantité $\pm \overline{PL'}$ à q', ce qui se fera en transportant parallèlement à elle-même la droite $\overline{P'L'}$ en $\overline{Q'p'}$, de façon que le point L' tombe en Q', et le point P' en p' qui devra être situé par rapport à Q' du même côté que P' par rapport à L'. De cette manière, on aura

$$\overline{Op'} = q' + (y'' - h'') \operatorname{tang}\beta - a \cos\alpha.$$

Le rayon de courbure s'exprimera au moyen des lignes que l'on vient de construire, et l'on aura

$$\rho'' = \overline{OQ} \frac{\overline{Op'}}{\overline{OP''}}.$$

Pour éviter la construction de lignes de grandes dimensions dans le sens des x, ce qui obligerait à donner à l'épure de grandes dimensions à la fois dans le sens des x et dans celui des y, nous rabattrons le point P'' en P''' sur le prolongement de l'axe des x, de sorte que l'on ait $\overline{OP'''} = \overline{OP''}$. Or, si nous joignons $P'''p'$, et que nous menions QR parallèle à $P'''p'$, il est facile de voir que l'on aura $\overline{OR} = \rho''$, car les triangles semblables OQR, $OP'''p'$ donnent la relation

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{Op'}}{\overline{OP'''}}$$

qui coïncide avec l'équation précédente. La position C du centre de courbure s'obtiendra ensuite, en portant sur la normale, de I en C, la distance $\overline{IC} = \overline{OR}$.

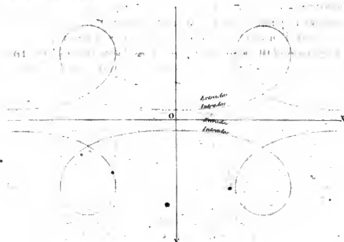
Cette construction du rayon de courbure de l'intrados fictif donnera le moyen de construire en même temps l'extrados, puisque ces courbes sont parallèles et distantes de la quantité e. Quant à l'intrados réel, il sera facilement donné par la construction des épaisseurs dont l'expression (y) est

$$\varepsilon = e + \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_1}y'' = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{\rho^2}y''.$$

En effet, prenons sur l'axe des x la distance $\overline{OE'} = e$, et menons par le point E' une droite E'E', parallèle à OY; menons ensuite par le même point E' une autre droite E'E'' faisant avec la première un angle dont la tangente soit $\frac{ie}{6\mu_1}$ ou $\frac{1}{3}\frac{e^2}{\rho^2}$; l'abscisse PJ, du point J de la droite E'E'' ayant y'' pour ordonnée, sera la valeur de l'épaisseur ε correspondante au plan de joint qui se projette en IN. Si donc on fait $\overline{IE} = e$, et que l'on porte ensuite de E en i la distance $\overline{PJ} = \varepsilon$, le point i ainsi déterminé appartiendra à l'intrados réel.

Il ne sera peut-être pas sans intérêt d'indiquer par une figure la disposition qu'affectent l'extrados et l'intrados fictif construits par le procédé qui vient d'être indiqué, et dans l'hypothèse $i = 1$.

La figure ci-jointe rend sensibles les particularités de la disposition dont il s'agit:



31. Voici maintenant l'usage que l'on pourra faire du tracé de l'intrados au moyen du rayon de courbure, pour la détermination des constantes (nos 22 et suivants), lorsqu'on voudra obtenir leurs valeurs approchées, sans avoir recours aux formules (s''), ou qu'on pourra s'en tenir à l'exactitude dont les procédés graphiques sont susceptibles. On déduira des considérations relatives aux limites de e exposées nos 25 et 27, une première valeur approchée de cette inconnue. L'équation (v''), n° 24, donnera μ_0 en fonction de l'arbitraire μ_1 dans le cas des arches *incomplètes*, et q se déduira de la relation $q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i}$ déjà plusieurs fois mentionnée. Dans le cas des arches *en anse de panier*, la quantité q devra être tirée de l'équation (d''), n° 26. Au moyen de e et q, il sera possible de construire l'intrados réel, et si l'on a préalablement tracé une droite parallèle à l'axe des x, à la distance f au-dessous du

sommet de cet intrados, on constatera si cette droite rencontre la courbe à une distance de l'axe des y égale à la demi-ouverture g ou différente de celle-ci. Dans le premier cas, la valeur de e d'où l'on sera parti sera la valeur cherchée; dans le second, il faudra recommencer le tracé en adoptant une valeur de e différente de la première, et appliquer pour la correction de cette valeur l'une des méthodes dont il a été question à la fin du nº 24. Il est clair que le dernier tracé correspondant à la valeur de e qui donne la demi-ouverture ou abscisse g, pour une flèche f ou une ordonnée égale à $h + e_1 + f$, présente la solution graphique du problème qui consiste à déterminer la forme entière de l'intrados et de l'extrados, puis les inclinaisons des plans de joint et les rayons de courbure. Dans le tracé définitif comme dans les tracés préliminaires, la construction des courbes se trouve ramenée à celle d'arcs de cercle de plus ou moins d'étendue, ainsi que nous l'avons annoncé dans le nº 1.

On pourra vérifier l'exactitude des tracés successifs ou du tracé définitif dans le cas des arches *incomplètes*, en calculant l'angle extrême α_1 par la formule (m''), où y''_1 doit avoir la valeur donnée par l'équation (w''), et comparant cet angle à celui donné par le tracé; ces angles doivent coïncider, quelque fausse que soit l'hypothèse sur la valeur de e. Dans le cas des arches *en anse de panier*, si l'on mène une droite parallèle à l'axe des x à une distance égale à f au-dessous du sommet de l'intrados réel, il faudra que la normale au même intrados menée par le point d'intersection de la droite et de l'intrados coïncide avec cette même droite.

COMPARAISON DES ARCHES ÉTABLIES SUIVANT LES PRINCIPES PRÉCÉDENTS, AVEC CELLES DONT L'INTRADOS PRÉSENTE LES FORMES AUJOURD'HUI EN USAGE.

32. Ayant effectué divers tracés d'arches *incomplètes*, conformément à la théorie que nous venons d'exposer, nous avons comparé ces tracés à ceux fournis par des intrados ayant en réalité la forme d'arcs de cercle, et assujettis aux mêmes conditions rela-

tives à la flèche et à l'ouverture que les précédents. Les voûtes *en arc de cercle* présentent, ainsi que cela doit être, moins de convexité vers les reins que les intrados déduits de notre théorie, et il semble, au premier abord, qu'il ne doive y avoir aucun inconvénient à s'en tenir à l'emploi de l'arc de cercle, à cause de la facilité de sa construction. On tomberait néanmoins dans une grave erreur en admettant cette conséquence. En effet, si, comme il est vrai, l'arc de cercle et la courbe théorique, qui coïncident au sommet et aux naissances, laissent entre eux un assez faible intervalle vers les reins, on admettra aisément qu'en remplissant cet intervalle, c'est-à-dire en passant de l'intrados indiqué par la théorie à l'arc de cercle, on n'ajoutera pas sensiblement à la charge totale de l'arche, et que dès lors la situation de la résultante des pressions restera sensiblement la même que dans le premier cas. Cette résultante passera vers le milieu des joints qui répondent à l'appareil théorique. Or supposons qu'en substituant l'appareil *en arc de cercle* à ce dernier, on conserve néanmoins les mêmes épaisseurs, ou encore, des épaisseurs constantes égales à celles qui ont lieu aux naissances, il arrivera que vers le tiers de la distance de celles-ci au sommet, à l'endroit du plus grand écart que présentent les deux courbes, les points qui correspondaient au milieu des anciennes épaisseurs se trouveront plus voisins du nouvel extrados, au point de n'en être éloignés que du $\frac{1}{3}$ ou du $\frac{1}{4}$ de l'épaisseur totale : la résultante des pressions s'approchera donc d'autant de ce nouvel extrados, et la distribution des pressions dans chaque joint se trouvera considérablement modifiée. On peut facilement reconnaître que l'addition de matière provenant du passage de la courbe théorique à l'arc de cercle, doit avoir pour effet une augmentation de la charge générale de la voûte, si la différence de convexité est notable, et qu'il en doit résulter une plus grande convexité dans la courbe *de la résultante des pressions;* celle-ci doit donc en réalité se rapprocher plus du nouvel extrados que s'il n'y avait aucune augmentation de charge. Admettons seulement qu'elle

s'en rapproche en définitive d'une quantité égale au tiers (*) de l'épaisseur du voussoir, la pression totale dans le joint n'ayant pu qu'augmenter, il en résultera que la pression par unité de surface deviendra au moins double de celle primitive qui était uniforme : or, si la pression primitive était déjà égale à la limite des pressions qu'on peut faire supporter sans inconvénient aux voussoirs, il arrivera que ceux-ci ne seront plus capables de résister à l'action de forces dont les intensités ont été doublées; de là naîtront des phénomènes plus ou moins prononcés de rupture par écrasement, et qui pourront compromettre gravement la stabilité de la construction. Inversement, on conclura de ces considérations, que si des arches *en arc de cercle* présentent toute la stabilité désirable, on pourrait leur substituer des arches établies suivant nos principes, et dans lesquelles les pressions maximum par unité de surface se trouvant réduites de moitié, par exemple, il serait facile de réduire en même temps les épaisseurs, et, par suite, les frais de construction, d'une quantité notable.

Enfin nous ajouterons que les mêmes considérations s'appliquent aux arches *en anse de panier* construites d'après des procédés qui donnent à l'intrados une forme plus ou moins voisine de celle des ellipses. Toutes ces courbes présentent, comme l'arc de cercle, moins de convexité vers les reins que celles que nous proposons. La deuxième partie de ce mémoire sera accompagnée d'épures qui présenteront la comparaison des profils circulaires ou elliptiques avec ceux dont nous avons exposé la théorie.

(*) En se basant sur le principe assez généralement admis de la proportionnalité des profondeurs d'impression aux intensités des pressions, on démontre ce résultat bien connu : que si deux corps prismatiques sont en contact suivant une face plane, et qu'on vienne à les soumettre à des pressions dont la résultante perpendiculaire à cette face, et située dans un plan qui la partage symétriquement, passe à une distance d'une arête, égale au tiers de la distance de cette arête à celle opposée, la pression par unité de surface, vers la première, s'élèvera au double de la pression moyenne, tandis qu'elle décroîtra jusqu'à devenir nulle vers l'arête opposée.

DEUXIÈME PARTIE.

33. La deuxième partie de notre travail diffère, à quelques égards, du mémoire qui a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 14 décembre 1846, et sur lequel un rapport a été fait dans la séance du 26 octobre 1852.

Ce mémoire, dans lequel nous avions restreint nos formules au cas ordinaire où les matériaux qui forment le massif peuvent être considérés comme présentant sensiblement la même densité que les voussoirs, renfermait divers exemples de l'application de ces formules par voie de tâtonnements, au cas des arches incomplètes dites *en arc de cercle*, et des Tables à double entrée pour le cas des arches complètes ou *en anse de panier*, tables qui dispensaient d'effectuer les calculs par tâtonnements dont il vient d'être question pour le cas des autres arches. Nous avions profité de la facilité que nous offraient ces tables pour nous livrer à l'examen d'un assez grand nombre d'arches *en anse de panier* construites depuis longtemps. Le mémoire était suivi d'une application de la théorie générale, au cas où la charge qui s'élève au-dessus de la clef est très-grande, et nous avions choisi pour exemple celui que nous offre l'appareil connu, dans l'art des constructions, sous le nom de *poitrail*.

Dans leur rapport, MM. les Commissaires ont exprimé le désir que des tables fussent aussi construites pour abréger les calculs relatifs à l'établissement des arches dites *en arc de cercle*. Au moment où l'impression de notre mémoire a été décidée, nous avons songé sérieusement à nous rendre au vœu exprimé par la Commission, et à combler ainsi une lacune que nous regrettions nous-même de laisser dans notre travail.

Après un mûr examen, nous avons reconnu que le problème relatif aux arches incomplètes, qui nécessiterait la construction de tables à triple entrée, si l'on tenait à conserver les données et

inconnues que nous avions introduites dans la première partie de notre mémoire et dans le mémoire présenté en dernier lieu, n'exige que le calcul de tables à double entrée, si l'on exclut les termes du deuxième ordre ou dépendants du carré des épaisseurs, et que l'on substitue aux données et aux inconnues d'autres quantités. (Par exemple, à l'égard des données, il convient de substituer la quantité $h'' = h + e$ à la donnée h.) De cette manière, on n'aurait, il est vrai, que des valeurs approchées des inconnues, et qui conviendraient dans les cas les plus ordinaires; mais on aperçoit la possibilité de construire une nouvelle table à double entrée, d'une petite étendue, qui fournisse la correction de la valeur de l'inconnue principale. Le même ordre d'idées s'applique au cas des arches *en anse de panier,* et la construction d'une table à simple entrée est alors suffisante. Théoriquement, la solution déduite de cette table exige une correction; mais on peut s'assurer que, dans les circonstances les plus défavorables, la correction qui porterait sur la différence de niveau du sommet de l'intrados ou des naissances avec la chaussée, dépasserait à peine un millimètre, et que, dans les limites ordinaires de la pratique, la correction qui resterait presque toujours au-dessous de cette quantité, serait toujours négligeable : en sorte que la table relative aux arches *en anse de panier* peut être considérée comme donnant des solutions exactes au point de vue pratique. Cette table, d'un usage très-simple, remplace la table à double entrée que nous avions construite tout d'abord. Quant à la transformation que nous faisons subir aux données, elle est telle que l'une ou l'autre arbitrairement, des deux quantités h et μ_1, peut toujours être donnée *a priori.*

Nous exposerons dans cette deuxième partie les principes qui nous ont guidé dans la construction des tables pour les deux espèces d'arches dont nous traitons, et nous insérerons ces tables à la fin du mémoire. Comme elles dispensent d'effectuer, par voie de tâtonnements, les calculs ou tracés qui seraient indispensables sans leur secours, nous ne donnerons point d'exemple de ce genre.

Il ne serait nécessaire de recourir à ces procédés, que si l'on voulait avoir égard à la différence de densité du massif et des voussoirs. Or nous pensons que les ingénieurs qui tiendront assez à la précision pour avoir égard à cette différence, ne reculeront pas devant l'emploi des méthodes de calcul ou des méthodes graphiques qui ont été indiquées dans la première partie. Faisons remarquer, à ce sujet, qu'en supposant seulement le produit $(1-i)\,h'$ du même ordre de petitesse que les épaisseurs, ou du premier ordre, ce qui est très-admissible dans les arches de pont, il serait possible de joindre à nos tables de nouvelles tables destinées à corriger la solution obtenue en faisant $i=1$. Le temps nous manque absolument pour entreprendre ces nouvelles recherches.

L'étendue déjà considérable de notre travail, et la crainte d'abuser de la facilité que l'Académie a bien voulu nous offrir pour l'impression, nous déterminent à ne point publier ici le chapitre sur l'établissement des appareils dits *poitrails*, lesquels, bien qu'ils présentent une grande analogie avec les arches de pont, ne doivent point cependant être considérés comme étant des cas particuliers d'arches de pont proprement dites.

SIMPLIFICATION DES FORMULES GÉNÉRALES POUR LES CAS ORDINAIRES QUE PRÉSENTENT LES ARCHES DE PONT.

34. Les deux éléments de réduction auxquels nous aurons recours sont le rapport désigné par i, de la densité du massif à celle des voussoirs, et la hauteur h de la charge qui s'élève au-dessus du plan horizontal tangent à l'extrados.

Le plus souvent, et c'est d'ailleurs l'habitude du plus grand nombre des ingénieurs, on peut négliger la différence de densité du massif et des voussoirs. C'est ce que nous ferons dans tout ce qui va suivre, en posant

$$i=1.$$

Cette relation permet d'effectuer immédiatement une grande simplification dans les formules (s''), en y réduisant à zéro les coefficients D et G et les termes des autres coefficients qui ont $(1 - i)$ pour facteur.

Quant à la hauteur de charge h, cette quantité est très-grande par rapport à l'épaisseur dans les tunnels et dans les *poitrails* dont il a été question au numéro précédent. La grandeur de h permettrait aussi des simplifications, et rendrait praticable l'emploi des séries à la place des fonctions elliptiques; mais nous ne nous occuperons point de ces constructions, par la raison énoncée en terminant le même numéro. Dans les ponts, au contraire, la hauteur h est très-faible, et presque toujours plus petite que l'épaisseur de la voûte. Nous avons déjà dit au nº 20 que la petitesse de h permet de réduire l'échelle des modules des fonctions elliptiques au premier de la série, et qu'il suffit de calculer une seule amplitude en outre de celle qui sert de point de départ à la série des amplitudes. Nous avons fait de diverses manières le calcul de l'erreur qui en résulte, et nous nous sommes assuré qu'elle est à peu près insensible dans le cas des ponts. Néanmoins, dans le calcul des tables, nous nous sommes astreint à ajouter la petite correction nécessaire pour obtenir le degré d'exactitude que l'on atteindrait en tenant compte, dans le calcul des fonctions elliptiques, d'un module et d'une amplitude de plus.

Nous commencerons par opérer sur les fonctions elliptiques des transformations indiquées par la petitesse de h ou de h''. L'expression de $\tang^2 \varphi$, équations (s''), montre que si l'on y prend y'' égal à l'ordonnée du point inférieur de l'intrados, l'angle φ sera plus voisin de 90° que de zéro : comme nous ne ferons usage des équations (s'') que pour établir une relation entre les coordonnées du point inférieur de l'intrados, il convient ici de substituer à l'angle φ son complément; posons donc

$$\xi = 90^\circ - \varphi.$$

Nous avons dit en outre que le module c est très-voisin de l'unité

dans la même hypothèse relative à h'' : pour cette raison, nous lui substituerons son complément b donné par la formule

$$b^2 = 1 - c^2:$$

si l'on fait, de plus,

$$\sin\psi = b,$$

d'où

$$\cos\psi = c,$$

on aura l'échelle suivante des modules :

$$\sin\psi_1 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\sin\psi_2 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\psi_n = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\psi_{n-1};$$

celle des amplitudes deviendra

$$\cos(2\xi_1 - \xi) = \cos\xi \cos\psi,$$

$$\cos(2\xi_2 - \xi_1) = \cos\xi_1 \cos\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos(2\xi_n - \xi_{n-1}) = \cos\xi_{n-1} \cos\psi_{n-1}.$$

Dans le cas où les angles ξ seraient très-petits, on ne pourrait plus se servir de ces formules; mais on en déduit les suivantes qui ne présentent pas les mêmes difficultés :

$$\sin^2(2\xi_1 - \xi) = \sin^2\xi + \cos^2\xi \sin^2\psi,$$

$$\sin^2(2\xi_2 - \xi_1) = \sin^2\xi_1 + \cos^2\xi_1 \sin^2\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin^2(2\xi_n - \xi_{n-1}) = \sin^2\xi_{n-1} + \cos^2\xi_{n-1} \sin^2\psi_{n-1}.$$

Ces dernières formules ne sont pas logarithmiques : il en existe d'autres qui ont l'avantage de l'être, mais elles exigent que les modules se succèdent dans l'ordre inverse de celui que nous avons adopté; nous les aurions rapportées, s'il nous avait été nécessaire d'effectuer les calculs au delà du premier module. Les précédentes, qui nous serviront au calcul de l'erreur que l'on commet en s'arrêtant à ce module, montrent actuellement la rapidité avec laquelle l'angle ξ_n se rapproche de sa valeur limite, lorsque ψ est très-petit ou que c diffère peu de l'unité.

Enfin, les deux systèmes de formules propres au calcul des fonctions elliptiques elles-mêmes deviennent :

$$F(c_n, \varphi_n) = \log\cot\frac{1}{2}\xi_n,$$

$$F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\psi_{n-1}} F(c_n, \varphi_n),$$

. . . .

$$F(c_1, \varphi_1) = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\psi_1} F(c_2, \varphi_2),$$

$$F(c, \varphi) = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\psi} F(c_1, \varphi_1);$$

$$E(c_n, \varphi_n) = \cos\xi_n,$$

$$E(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = 2\cos^2\frac{1}{2}\psi_{n-1} E(c_n, \varphi_n) + 2\sin^2\frac{1}{2}\psi_{n-1} F(c_n, \varphi_n) - \cos(2\xi_n - \xi_{n-1}),$$

. . . .

$$E(c_1, \varphi_1) = 2\cos^2\frac{1}{2}\psi_1 E(c_2, \varphi_2) + 2\sin^2\frac{1}{2}\psi_1 F(c_2, \varphi_2) - \cos(2\xi_2 - \xi_1),$$

$$E(c, \varphi) = 2\cos^2\frac{1}{2}\psi E(c_1, \varphi_1) + 2\sin^2\frac{1}{2}\psi F(c_1, \varphi_1) - \cos(2\xi_1 - \xi).$$

35. Nous limiterons d'abord l'emploi des formules précédentes en faisant $n = 1$. De cette manière, il sera inutile de calculer ψ_1, et il suffira d'appliquer la première des formules qui donnent la série des ξ. Le calcul des fonctions F et E se réduira ainsi à celui des formules extrêmes de chacune des deux séries.

Ceci posé, les premières équations (s'') donnent, en vertu de $n = 1$:

$$h'' = h + e,$$

$$q^2 = 2e\mu_0,$$

$$A = q^2 + (h'' - e)^2,$$

$$C = 2\left[q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2\right],$$

$$B = C + h''^2,$$

$$\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{B}{h''^2}\,\frac{y''^2 - h''^2}{B - y''^2}.$$

De cette dernière équation on tire les trois relations suivantes:

$$\sin^2\xi = \frac{h''^2}{y''^2}\,\frac{B - y''^2}{B - h''^2}, \quad \cos^2\xi = \frac{B}{y''^2}\,\frac{y''^2 - h''^2}{B - h''^2}, \quad \operatorname{tang}^2\xi = \frac{h''^2}{B}\,\frac{B - y''^2}{y''^2 - h''^2},$$

dont la première sera particulièrement utile.

Nous avons posé plus haut : $\sin\psi = b$, et $b^2 = 1 - c^2$; il s'ensuit

$$\sin\psi = \sqrt{1 - c^2};$$

or, $1 - c^2 = \frac{B - C}{B}$ en vertu des équations (s''), il vient donc

$$\sin\psi = \frac{h''}{\sqrt{B}}.$$

La valeur de Δ^2 est

$$\Delta^2 = 1 - c^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

ou

$$\Delta^2 = \sin^2\xi + \cos^2\xi \sin^2\psi;$$

de cette expression comparée avec la première des relations non logarithmiques entre les amplitudes, rapportées plus haut, on tire

$$\Delta^2 = \sin^2(2\xi_1 - \xi):$$

mettant dans la valeur précédente de Δ^2, pour $\sin^2\xi$, $\cos^2\xi$ et $\sin\psi$, leurs valeurs données ci-dessus, il vient

$$\Delta^2 = \frac{k''^2(B - y''^2) + k''^2(y''^2 - k''^2)}{y''^2(B - k''^2)} = \frac{k''^2}{y''^2},$$

et l'on a simplement

$$\Delta = \sin(2\xi_1 - \xi) = \frac{k''}{y''}.$$

Le troisième terme de la valeur de x'' devient de même

$$\frac{C}{\sqrt{B}}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{B - k''^2}{\sqrt{B}}\,\frac{y''}{k''}\sin\xi\cos\xi = \sqrt{B - y''^2}\sqrt{1 - \frac{k''^2}{y''^2}}$$

(en supposant les angles φ et ξ compris entre 0° et 90°), ou, en vertu de la relation précédente,

$$\frac{C}{\sqrt{B}}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \sqrt{B - y''^2}\cos(2\xi_1 - \xi).$$

Les fonctions elliptiques limitées dans leur développement, comme il a été convenu, se réduisent à

$$F(c, \varphi) = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\psi}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1,$$

$$E(c, \varphi) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\psi\cos\xi_1 + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \cos(2\xi_1 - \xi).$$

A l'aide des valeurs que nous venons d'obtenir, et à cause de $D = o$, $G = o$, l'expression de $\pm x''$ se réduit d'abord à

$$\pm x'' = \frac{A}{\sqrt{B}} . F(c, \varphi) - \sqrt{B} . E(c, \varphi) + \sqrt{B - y''^2} \cos(2\xi_1 - \xi)$$

(on écrit ici le double signe devant x'', parce que l'on suppose les angles φ et ξ compris entre 0° et 90°, ce qui suffit dans le problème des arches de pont) : en substituant dans cette dernière équation les valeurs des fonctions F et E, il vient

$$\pm x'' = \frac{A - 2B\sin^2\frac{1}{2}\psi\cos^2\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{B}\cos^2\frac{1}{2}\psi} \log\cot\frac{1}{2}\xi_1 - 2\sqrt{B}\cos^2\frac{1}{2}\psi\cos\xi_1$$
$$+ (\sqrt{B} + \sqrt{B - y''^2})\cos(2\xi_1 - \xi).$$

On peut encore chasser l'angle ψ : en effet, l'on a

$$2\cos^2\frac{1}{2}\psi = 1 + \cos\psi = 1 + \sqrt{1 - \frac{h''^2}{B}} = 1 + \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{B}},$$

ce qui donne

$$2\sqrt{B}\cos^2\frac{1}{2}\psi = \sqrt{B} + \sqrt{C}.$$

D'un autre côté, le numérateur de la fraction qui multiplie $\log\cot\frac{1}{2}\xi_1$ peut s'écrire

$$A - \frac{1}{2}B\sin^2\psi = A - \frac{1}{2}h''^2;$$

or, on a, par les équations (3),

$$A = \frac{1}{2}C + h''^2 - \frac{1}{3}e^2,$$

et, par suite,

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}h''^2 - \frac{1}{3}e^2,$$

d'où

$$A - \frac{1}{2} h''^2 = \frac{1}{2}\left(B - \frac{2}{3} e^2\right):$$

soit, pour abréger,

$$A' = \frac{B - \frac{2}{3} e^2}{\sqrt{B} + \sqrt{C}},$$

il viendra finalement

$$\pm x'' = A' \log \cot \frac{1}{2} \xi_1 - (\sqrt{B} + \sqrt{C}) \cos \xi_1 + (\sqrt{B} + \sqrt{B - y''^2}) \cos (2\xi_1 - \xi).$$

85 *bis*. Sans entrer dans tous les développements qui seraient nécessaires pour effectuer les calculs, nous allons dire brièvement comment nous avons obtenu la correction qu'il faut apporter à la valeur de x'' pour parvenir au même degré d'exactitude que si nous avions poussé le calcul des fonctions elliptiques jusqu'à l'emploi de l'amplitude ξ_2.

Nous avons posé d'abord

$$\xi_2 = \xi_1 + \sigma,$$

σ désignant une quantité très-petite que nous avons obtenue en appliquant le théorème de Taylor à la relation

$$\sin^2 (2\xi_2 - \xi_1) = \sin^2 \xi_1 + \cos^2 \xi_1 \sin^2 \psi_1 :$$

la valeur de σ est, aux termes près des ordres supérieurs,

$$\sigma = \frac{1}{4} \cot \xi_1 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \psi.$$

Quant à la valeur de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi$: de la relation

$$2\sqrt{B} \cos^2 \frac{1}{2} \psi = \sqrt{B} + \sqrt{C},$$

on tire

$$2\sqrt{B}\sin^2\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{B} - \sqrt{C},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \frac{h''}{\sqrt{B}+\sqrt{C}},$$

quantité dont la quatrième puissance est très-petite.

En faisant toujours usage du théorème de Taylor, on trouve aisément

$$\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_2 = \log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \tfrac{1}{4}\frac{\cot\xi_1}{\sin\xi_1}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\cos\xi_2 = \cos\xi_1 - \tfrac{1}{4}\cos\xi_1\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi.$$

A l'aide de ces valeurs, on obtient pour expressions approchées des corrections à appliquer aux fonctions F et E,

$$\delta F = \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left(\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \frac{\cot\xi_1}{\sin^2\xi_1}\right),$$

$$\delta E = \operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left(\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \cos\xi_1\right);$$

et l'on en déduit, pour la correction de la valeur absolue de x'',

$$\delta x'' = -\sqrt{B}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left\{\tfrac{7}{8}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 + \left(\frac{1}{8\sin^2\xi_1} - 1\right)\cos\xi_1\right\},$$

en négligeant les quantités de l'ordre de $\operatorname{tang}^8\tfrac{1}{2}\psi$. Dans cette expression, la parenthèse croît à mesure que ξ_1 diminue ou que h'' tend vers zéro; mais le facteur $\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi$ décroît plus rapidement que la valeur de la parenthèse n'augmente, et $\delta x''$ s'annule avec h''.

Une expression encore susceptible de simplification est celle de la tangente de l'angle α que fait la normale à l'extrados avec la verticale : l'équation (m'') dans laquelle les quantités α et y'' ont été

notées de l'indice 1, devient, en rétablissant la généralité de cette formule,

$$\tang\alpha = \frac{\sqrt{(y'^2 - k'^2)(B - y'^2)}}{A - y'^2};$$

on en tire aisément, au moyen des relations précédemment établies entre les quantités A, B et C, et négligeant les termes en e^4,

$$\sin\alpha = \frac{2}{C}\,\frac{\sqrt{(y'^2 - k'^2)(B - y'^2)}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{C}(y'^2 - k'^2)\right]\frac{e^2}{C}}},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{C}\,\frac{A - y'^2}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{C}(y'^2 - k'^2)\right]\frac{e^2}{C}}}.$$

La dernière de ces équations va nous fournir un moyen plus rapide de calculer l'angle α. En y substituant la valeur de A en fonction de C obtenue précédemment, puis multipliant haut et bas par $\frac{2}{C}$, on a

$$\cos\alpha = \frac{1 - 2\frac{y'^2 - k'^2}{C} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - 2\frac{y'^2 - k'^2}{C}\right]\frac{e^2}{C}}};$$

soit

$$\cos\alpha' = 1 - 2\,\frac{y'^2 - k'^2}{C},$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha' = \pm\sqrt{\frac{y'^2 - k'^2}{C}},$$

équation qui sera très-propre à déterminer l'auxiliaire α'; la valeur de $\cos\alpha$ deviendra

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos\alpha'\,\frac{e^2}{C}}}.$$

or, si l'on néglige les termes du quatrième ordre, elle se réduira à

$$\cos\alpha = \cos\alpha' - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin^2\alpha' :$$

on en déduit aisément

$$\sin(\alpha - \alpha') = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'.$$

Cette équation, jointe à celle qui donne l'angle α' par le sinus de sa moitié, sera d'un emploi plus commode que les formules précédentes, pour calculer l'angle α.

L'interprétation géométrique de cette relation entre les angles α et α' est facile. Déterminons, en effet, l'angle des intrados réel et fictif; son expression est $\frac{d.2\delta}{ds''} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}\frac{dy''}{ds''}$, en vertu de l'équation (x): or, en négligeant les termes du troisième ordre, cette expression coïncide avec la valeur de $\alpha - \alpha'$ donnée par l'équation précédente. Il en résulte que l'angle α' est l'angle que ferait avec l'axe des x la tangente à une courbe dont les éléments seraient symétriques avec ceux de l'intrados réel par rapport à la tangente à l'intrados fictif.

Avant d'aller plus loin, il est indispensable de résumer les relations que nous venons d'obtenir; nous y joindrons une relation nouvelle en posant $C = 4Q^2$, Q^2 étant une quantité qui nous servira dans le calcul des coordonnées par voie de différence. Pour éviter le recours à la première partie du mémoire, nous reproduirons les notations.

RÉSUMÉ DES FORMULES SIMPLIFIÉES POUR LE CAS OÙ LE MASSIF ET LA VOÛTE SONT DE MÊME DENSITÉ.

Notations.

36. L'axe des y est vertical et passe par le sommet de l'arche; l'axe des x est horizontal et situé dans un plan parallèle au plan des têtes, qui est élevé au-dessus du plan tangent à l'extrados d'une quantité h représentant la hauteur d'une couche de matériaux

de même densité que le massif et dont le poids serait égal à celui des couches de densités diverses qui surchargent la voûte.

Nous désignons par :

h la hauteur de la charge qui s'élève au-dessus de la clef réduite à la densité du massif, comme il vient d'être dit, en sorte que h désigne l'ordonnée du sommet de l'extrados;

e l'épaisseur fictive de la voûte ou la distance constante entre l'extrados et l'intrados fictif, mesurée suivant la normale commune à ces deux courbes;

h'' l'ordonnée du sommet de l'intrados fictif;

x', y' et ρ' les coordonnées et le rayon de courbure de l'extrados;

x'', y'' et ρ'' les coordonnées du point de l'intrados fictif situé sur la normale à l'extrados menée par le point (x', y'); et le rayon de courbure de l'intrados fictif, au point (x'', y'');

X, Y les coordonnées du point de l'intrados réel situé sur la même normale;

α l'angle de cette normale avec l'axe des y ou du plan de joint passant par le point (x', y') avec la verticale;

α' un angle auxiliaire très-peu différent de α, et dont la signification géométrique a été donnée à la fin du numéro précédent.

ε l'épaisseur réelle, ou la distance comprise entre le point (x', y') de l'extrados et le point (X, Y) de l'intrados réel;

δ la distance comprise entre le milieu du joint réel et le milieu de l'épaisseur fictive, en sorte que 2δ désigne la distance des points (x'', y'') de l'intrados fictif et (X, Y) de l'intrados réel;

μ la hauteur d'une colonne prismatique de la matière des voussoirs, dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans le plan normal à l'extrados mené par le point (x', y');

λ la dimension de l'arche dans le sens perpendiculaire au plan des têtes ou parallèle aux génératrices;

ϖ le poids de l'unité de volume de la matière des voussoirs et du massif;

T et t la pression totale et la pression par unité de surface qui ont lieu dans le plan normal à l'extrados mené par le point (x', y');

U la poussée horizontale qui résulte des actions exercées par le massif sur la face verticale de la culée qui passe par l'arête inférieure de l'extrados;

u l'ordonnée du point d'application de cette résultante;

V le volume des matériaux de la demi-arche et du massif limité dans le sens horizontal par des plans verticaux menés par le sommet et le point inférieur de l'extrados parallèlement aux génératrices;

f la flèche de l'arche, ou la montée;

g la demi-ouverture.

Les indices o et 1 serviront à désigner les valeurs particulières que prennent les diverses variables au sommet de la voûte et aux naissances (à l'exception de l'indice 1 qui affecte les lettres ψ et ξ dans les expressions des modules et amplitudes des fonctions elliptiques).

Voici maintenant les relations dont nous aurons à faire usage pour calculer l'abscisse d'un point de l'intrados fictif en fonction de l'ordonnée, déterminer la situation de la normale et l'intensité des pressions:

$$h'' = h + e, \tag{1}$$

$$q^2 = 2e\mu_0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= q^2 + (h'' - e)^2, \\ 4Q^2 = C &= 2\left[q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2\right], \\ B &= C + h''^2, \\ A' &= \frac{B - \frac{2}{3}e^2}{\sqrt{B} + \sqrt{C}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin(2\xi_1 - \xi) = \dfrac{h''}{y''}, \qquad \sin\xi = \dfrac{h''}{y''}\sqrt{\dfrac{B - y''^2}{C}}, \\ x'' = A'\log\cot\frac{1}{2}\xi_1 - (\sqrt{B}+\sqrt{C})\cos\xi_1 + (\sqrt{B}+\sqrt{B-y''^2})\cos(2\xi_1 - \xi) \\ \quad - \sqrt{B}\left(\dfrac{h''}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}\right)^4 \left\{\dfrac{7}{8}\log\cot\frac{1}{2}\xi_1 + \left(\dfrac{1}{8\sin^4\xi_1} - 1\right)\cos\xi_1\right\}. \ (*)\end{array}\right\} \quad (4)$$

(Pour plus de clarté, on a supprimé les doubles signes, ici et dans les expressions suivantes; on pourrait toujours les rétablir au besoin, en se rappelant que les courbes intrados et extrados sont symétriques par rapport à l'axe des y : tout se rapporte ainsi à la partie de l'arche située du côté des x positifs.)

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha = \dfrac{2}{C}\,\dfrac{\sqrt{(y''^2 - h''^2)(B - y''^2)}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{C}(y''^2 - h''^2)\right]\frac{e^2}{C}}}, \\ \cos\alpha = \dfrac{2}{C}\,\dfrac{A - y''^2}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{C}(y''^2 - h''^2)\right]\frac{e^2}{C}}},\end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{(y''^2 - h''^2)(B - y''^2)}}{A - y''^2}; \qquad (6)$$

on peut aussi calculer l'angle α au moyen des deux formules

$$\sin\frac{1}{2}\alpha' = \sqrt{\frac{y''^2 - h''^2}{C}}, \qquad \sin(\alpha - \alpha') = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'. \qquad (6\ bis)$$

$$\mu = \mu_0 + y'' - h'' + \frac{1}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2). \qquad (7)$$

(*) Il arrive souvent que le deuxième et le troisième terme du second membre sont peu différents : il faut alors calculer ces termes avec une figure de plus que le premier, à moins qu'on ne remplace ces deux termes par le suivant, que l'on obtient après quelques transformations,

$$-\frac{y''^2\cos^2(2\xi_1 - \xi)}{\sqrt{C}+\sqrt{B - y''^2}}\left\{\cos(2\xi_1 - \xi) + \left(1 + \frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y''^2}}{2\sqrt{C}}\right)\frac{\sin^2(2\xi_1 - \xi)}{\cos(2\xi_1 - \xi) + \cos\xi_1}\right\}.$$

Quant au dernier, il est presque insensible pratiquement; malgré cela, nous en avons tenu compte dans le calcul des tables dont il sera question ci-après.

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y', \qquad \varepsilon = e + 2\delta, \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{ll} Y = y'' + 2\delta\cos\alpha, & y' = y'' - e\cos\alpha, \\ X = x'' - 2\delta\sin\alpha, & x' = x'' + e\sin\alpha. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Les ordonnées des points extrêmes de l'intrados fictif sont

$$y''_0 = h'', \quad y''_1 = f + h'' + 2\delta_0 - 2\delta_1\cos\alpha_1; \tag{10}$$

celles des points extrêmes de l'intrados réel sont

$$Y_0 = h'' + 2\delta_0, \quad Y_1 = f + h'' + 2\delta_0; \tag{11}$$

et la valeur de la demi-ouverture est

$$g = X_1 = x''_1 - 2\delta_1\sin\alpha_1. \tag{12}$$

Les relations entre les pressions qui ont lieu dans les plans de joint extrêmes données par les équations (t'') et (u'') sont enfin

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 = \mu_0 + f + \dfrac{f(f+2h'')}{3\mu_0}, \\ \mu_0 = \mu_1 - f - \dfrac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Nous n'avons point à dire ici comment on devra se servir de ces formules, et pratiquer, suivant le besoin, les éliminations. En traitant de la construction des tables destinées à éviter les calculs par tâtonnements, nous montrerons, dans les numéros suivants, comment nous avons fait usage de ces formules; mais nous devions les rassembler tout d'abord.

DE LA CONSTRUCTION DE TABLES APPROPRIÉES À LA DÉTERMINATION DES INCONNUES, DANS LE CAS DES ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

37. De ce qui a été exposé au n° 24, il résulte que si l'on se donne, dans le cas des arches incomplètes, les quantités f, g,

h, μ_0 ou μ_1 et i, et que l'on attribue à l'épaisseur e une valeur hypothétique, on pourra calculer la valeur de g en fonction des cinq autres quantités, à l'aide des formules générales. Comme nous avons fait $i = 1$, la valeur de g n'est plus fonction, au moyen des équations du numéro précédent, que de quatre variables indépendantes; mais l'homogénéité de nos formules permet de substituer aisément la recherche des rapports des variables à la recherche de leurs valeurs absolues (*), en sorte que le problème serait ramené à celui de la construction de tables à triple entrée, problème à peu près inabordable pratiquement. Or la difficulté qui se présente ici peut être levée en substituant à la donnée h, l'ordonnée Y_0 du sommet de l'intrados. Les problèmes qui se présentent dans la construction des chemins de fer comportent plutôt, comme données relatives aux arches de pont, les différences de niveau de leurs diverses parties, que l'épaisseur rigoureusement déterminée des couches de matériaux qui s'élèvent au-dessus du sommet de l'extrados.

Admettant donc la quantité Y_0 comme l'une des données du problème, nous remarquerons que, si l'on fait abstraction des termes du deuxième ordre ou qui ont en facteur le carré de l'épaisseur e, et que, de plus, on prenne pour inconnue la quantité Q^2 ou $\frac{1}{4}C$, l'épaisseur e disparaitra complétement des équations; en sorte que g sera seulement fonction de f, Y_0 et de l'inconnue Q^2.

(*) Nous profiterons de la circonstance pour présenter une remarque qui eût peut-être été mieux placée ailleurs, et que le lecteur aura sans doute faite. Les relations que nous avons établies, ayant lieu entre des rapports de grandeurs linéaires, restent les mêmes dans les arches de profils semblables, où les longueurs homologues sont entre elles dans un même rapport : il s'ensuit que, dans les arches semblables, la quantité μ, qui détermine les pressions par unité superficielle entre les voussoirs en des points semblablement placés, est proportionnelle aux dimensions linéaires homologues des arches que l'on compare. La pression totale par unité de longueur mesurée parallèlement aux génératrices de l'intrados, qui est représentée par μe, et détermine la poussée dans le joint inférieur quand μ prend la valeur particulière μ_1, se trouve, par suite, proportionnelle au carré des dimensions homologues.

En effet, se donnant Q^2, Y, et f, les équations (11) et (10) donnent $h'' = Y$, et $y''_1 = f + h''$, aux termes près du deuxième ordre; les équations (3) donnent $C = 4Q^2$, $B = C + h''^2$; et, en faisant $y'' = y''_1$ dans les équations (4), celles-ci permettent d'obtenir la valeur de x''_1 qui, en vertu de (12), est égale à g, aux termes près du deuxième ordre. Introduisant les rapports de lignes au lieu de leurs valeurs absolues, il arrive que $\frac{g}{f}$, par exemple, n'est plus fonction que de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{Q^2}{f^2}$, et que la solution approchée du problème se trouve dépendre de la construction de tables à double entrée seulement.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée, nous avons calculé effectivement des tables qui présentent la suite des valeurs de $\frac{g}{f}$ relatives à des valeurs fixes de $\frac{Y_0}{f}$ et à des valeurs variables du rapport $\frac{Q^2}{f^2}$; dix tables de ce genre ont été calculées pour des valeurs de $\frac{Y_0}{f}$ égales à 0,4; 0,5; 0,6;....; 1,2; 1,3. Or, la recherche de la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$ en fonction de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{g}{f}$ à l'aide de ces tables eût été pénible; il eût fallu même en augmenter très-notablement l'étendue pour les adapter à cet usage. Pour obvier à ces inconvénients, nous avons pris le parti de *retourner* chacune des dix tables, c'est-à-dire de calculer par voie d'interpolation, à l'aide des tables primitives, de nouvelles tables qui donnent directement la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$ en fonction de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{g}{f}$. Nous avons formé de cette manière la première des tables à double entrée que l'on trouvera à la fin de ce mémoire, sous le titre de *Table I*. L'étendue que nous lui avons donnée nous paraît répondre aux exigences de l'art des constructions. Nous ne présenterons point ici les détails relatifs au calcul des tables; disons seulement que nous avons fait usage des formules d'intercalation mentionnées, à propos du calcul des éphémérides des planètes, dans un mémoire sur la détermination de leurs orbites, inséré dans la *Connaissance des Temps* pour 1852.

La Table I donne la valeur approchée de $\frac{Q^2}{f^2}$, et, par suite, celle de Q^2, aux termes près du deuxième ordre. Cette première approximation permet de calculer la valeur des termes négligés, et d'en tenir compte ensuite. En effet, ces termes étant du deuxième ordre ou dépendants du carré de e, il suffit d'obtenir la valeur approximative de e en fonction des données. A cet égard, se donnant μ_1 par exemple, la deuxième équation (13) fait connaître μ_0, et, si l'on élimine q^2 entre les équations (2) et (3), il vient

$$Q^2 = e\left(\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e\right),$$

d'où

$$e = \frac{Q^2}{\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e}, \tag{14}$$

équation dans laquelle on pourrait négliger $\frac{2}{3}e$ au dénominateur. La valeur trouvée de e, pour être admissible, doit, en vertu de l'équation (1), donner une valeur $h = h'' - e$ qui ne soit pas négative, et qui soit au moins égale à celle réclamée par l'expérience.

Si, au lieu de se donner μ_1, on se donnait h, il viendrait par l'équation (1),

$$e = h'' - h; \tag{15}$$

la valeur de μ_0 s'en déduirait :

$$\mu_0 = h'' + \frac{Q^2}{e} - \frac{2}{3}e, \tag{16}$$

et la première équation (13) donnerait celle de μ_1; cette dernière devrait être compatible avec la résistance des matériaux employés, pour que la solution fût admissible.

Dans les deux cas, il est donc possible d'obtenir une valeur approchée de e; nous allons dire actuellement quel usage il convient d'en faire, pour corriger la valeur de Q^2 déduite des tables.

38. Enumérons les quantités négligées dans le calcul de la Table I.

1° Nous avons fait $h'' = Y_0$; il résulte de la première équation (11) que h'' doit recevoir la correction

$$\delta h'' = -2\,\delta_0.$$

2° Nous avons pris $y''_1 = f + h''$; la deuxième équation (10) montre que l'on doit appliquer à y''_1 la correction

$$\delta y''_1 = \delta h'' + 2\,\delta_0 - 2\,\delta_1 \cos\alpha_1,$$

ou simplement

$$\delta y''_1 = -2\,\delta_1 \cos\alpha_1,$$

en vertu de la relation précédente.

3° Le terme en e^2 de la valeur de A′ ayant été négligé, il s'ensuit que x''_1 doit subir la correction spéciale

$$(\delta x''_1) = -\frac{2}{3}\,\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}\,e^2.$$

4° Nous avons fait simplement $g = x''_1$; il résulte de l'équation (12) que g doit recevoir la correction $\delta x''_1 - 2\,\delta_1 \sin\alpha_1$: comme, d'autre part, la valeur de g ne doit pas changer, on a cette équation de condition,

$$\delta x''_1 - 2\,\delta_1 \sin\alpha_1 = 0,$$

dans laquelle nous devons regarder $\delta x''_1$ comme étant la variation de x''_1 qui résulte des trois corrections que nous venons d'indiquer, et d'une correction inconnue $\delta(Q^2)$ ou δC qu'il s'agit de déterminer : x''_1 étant donc considéré comme fonction de h'', y''_1 et C, nous aurons

$$(\delta x''_1) + \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)\delta h'' + \frac{dx''_1}{dy''_1}\,\delta y''_1 + \frac{dx''_1}{dC}\,\delta C - 2\,\delta_1 \sin\alpha_1 = 0:$$

dans cette équation, $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$ désigne la dérivée partielle de x'', par rapport à h'', obtenue en faisant abstraction de la variation que x'', subit par suite de ce que y''_1 varie avec h''; le terme $\frac{dx''_1}{dy''_1}\delta y''_1$ comprend cette variation.

Substituant les valeurs obtenues plus haut de $(\delta x''_1)$, $\delta h''$ et $\delta y''_1$, et observant que l'on a $\frac{dx''_1}{dy''_1} = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}$, $\delta C = 4\delta(Q^2)$; il viendra

$$-\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}e^2 - 2\delta_0\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) - \frac{2\delta_1}{\sin\alpha_1} + 4\frac{dx''_1}{dC}\delta(Q^2) = 0.$$

Nous avons d'ailleurs, première équation (8),

$$2\delta_0 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}h'', \quad 2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y''_1,$$

ou, en négligeant les quantités du troisième ordre, équation (3),

$$2\delta_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}h'', \quad 2\delta_1 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}y''_1.$$

En négligeant les quantités du deuxième ordre dans la première équation (5), ce qui ne donnera lieu qu'à des erreurs du quatrième dans le résultat, on aura encore

$$\frac{2}{C\sin\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{(y_1''^2 - h''^2)(B - y_1''^2)}} = \frac{1}{y''_1\cos(2\xi_1 - \xi)\sqrt{B - y_1''^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on en tirera

$$6\frac{dx''_1}{dC}\delta(Q^2) = \left\{\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \frac{h''}{C}\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{1}{2\cos(2\xi_1 - \xi)\sqrt{B - y_1''^2}}\right\}e^2. \quad (17)$$

Pour faire usage de cette formule, il reste à déterminer les valeurs des deux dérivées $\frac{dx''_1}{dC}$ et $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$. On peut les obtenir de deux manières différentes.

En premier lieu, si l'on effectue les différentiations à l'aide des expressions du n° 36, et que l'on néglige la variation du dernier terme de x'', on parvient, après des transformations que nous nous dispenserons de reproduire, aux deux valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) &= h''\frac{2\sqrt{C}+\sqrt{B}}{(\sqrt{B}+\sqrt{C})^2}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \left[\frac{A'}{\sin\xi_1} - (\sqrt{B}+\sqrt{C})\sin\xi_1\right]\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y_1''^2}+\dfrac{2h''^2}{\sqrt{B-y_1''^2}}}{2y_1''\sqrt{B}\cos(2\xi_1-\xi)} \\
&\quad - \frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y_1''^2}}{y''_1}\operatorname{tang}(2\xi_1-\xi) + h''\left\{\frac{\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y_1''^2}} - \frac{1}{\sqrt{B}}[\cos\xi_1 - \cos(2\xi_1-\xi)]\right\}, \\
6\frac{dx''_1}{dC} &= 3\frac{2\sqrt{C}-\sqrt{B}}{\sqrt{C}(\sqrt{B}+\sqrt{C})}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \left[\frac{A'}{\sin\xi_1} - (\sqrt{B}+\sqrt{C})\sin\xi_1\right]\frac{3}{2}\frac{h''y''_1\cos(2\xi_1-\xi)}{C\sqrt{B}\sqrt{B-y_1''^2}} \\
&\quad + 3\left\{\frac{\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y_1''^2}} - \frac{\cos\xi_1}{\sqrt{C}} - \frac{1}{\sqrt{B}}[\cos\xi_1 - \cos(2\xi_1-\xi)]\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

En second lieu, $\frac{dx''_1}{dh''}$ désignant la dérivée partielle de x''_1 par rapport à h'', il vient, en vertu de ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{dx''_1}{dy''_1}\frac{dy''_1}{dh''},$$

ou simplement,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{dx''_1}{dy''_1},$$

à cause de $\frac{dy''_1}{dh''} = 1$, 2ᵉ équation (10). Or, on a, équation (6),

$$\frac{dx''_1}{dy''_1} = \cot\alpha_1 = \frac{A-y_1''^2}{\sqrt{y_1''^2-h''^2}\sqrt{B-y_1''^2}},$$

valeur qui donne, en ayant égard aux relations établies au n° 35, et négligeant les termes du deuxième ordre,

$$\frac{dx''_1}{dy''_1} = \frac{\sqrt{B-y_1''^2}}{2y''_1\cos(2\xi_1-\xi)} - \frac{y''_1\cos(2\xi_1-\xi)}{2\sqrt{B-y_1''^2}}.$$

Maintenant, C ou $4Q^2$ étant, en vertu du *retournement* des tables, une fonction de g et Y_1 ou de x''_1 et h'', il vient

$$dC = \frac{dC}{dx''_1}\,dx''_1 + \frac{dC}{dh''}\,dh'' :$$

pour obtenir la dérivée partielle $\frac{dx''_1}{dh''}$, on doit supposer Q^2 ou C constant; alors cette équation, en y faisant $dC = 0$, donne

$$\frac{dx'_1}{dh'} = -\frac{\frac{dC}{dh'}}{\frac{dC}{dx'_1}} = -\frac{\frac{d(Q^2)}{dh'}}{\frac{d(Q^2)}{dx'_1}}.$$

La dérivée partielle $\frac{dx'_1}{dC}$ s'obtiendra pareillement en faisant $dh' = 0$, et il viendra

$$\frac{dx'_1}{dC} = +\frac{1}{\frac{dC}{dx'_1}} = +\frac{1}{4\frac{d(Q^2)}{dx'_1}}.$$

A l'aide de ces diverses valeurs, on tirera de l'équation (17),

$$\frac{\delta(Q^2)}{\delta f} = \frac{1}{3}\left\{2\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \frac{x'_1}{\cos(2\xi_1-\xi)\sqrt{B-y_1'^2}} - \frac{h'}{C}\left(\frac{\sqrt{B-y_1'^2}}{y'_1\cos(2\xi_1-\xi)} - \frac{y'_1\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y_1'^2}}\right)\right\}\frac{d(Q^2)}{dx'_1} - \frac{2}{3}\frac{h'}{C}\frac{d(Q^2)}{dh'}. \quad (19)$$

La quantité f étant une constante, les deux dérivées que renferme cette expression peuvent s'écrire

$$f\frac{d\frac{Q^2}{f^2}}{d\frac{g}{f}} \quad \text{et} \quad f\frac{d\frac{Q^2}{f^2}}{d\frac{Y_1}{f}}.$$

Or, les nouvelles dérivées partielles que nous venons d'écrire se déduisent aisément des tables *retournées*, en prenant les différences de la fonction $\frac{Q^2}{f^2}$ successivement dans le sens vertical et dans le sens horizontal, et faisant usage de la formule connue

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\Delta x}\left\{\Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u + \frac{1}{3}\Delta^3 u - \frac{1}{4}\Delta^4 u + \ldots\right\}, \quad (20)$$

qui sert à obtenir la dérivée d'une fonction u réduite en table, au moyen de ses différences Δu, $\Delta^2 u$,... et de la différence constante Δx de la variable.

Il suffit ici de faire $\Delta x = 0{,}1$, ce qui conduit à prendre les différences de dix en dix termes dans le sens vertical, et de terme en terme dans le sens horizontal, pour obtenir des valeurs de $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$ et, par suite de δQ^2, qui corrigent assez exactement celles de Q^2. Les tables primitives ou des valeurs de $\frac{g}{f}$ auraient bien pu donner immédiatement les dérivées partielles $\frac{dx'_1}{dC}$; mais il n'aurait pas été possible d'en déduire aisément les dérivées $\frac{dx'_1}{dk''}$, tant à cause de la divergence de la série des différences Δu, $\Delta^2 u$,..., qu'à cause des limites relatives à $\frac{Q^2}{f^2}$ qu'il eût fallu reculer en augmentant démesurément l'étendue de ces tables.

Nous avons calculé les tables qui donnent les valeurs de la fonction $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$; on les trouvera à la suite des tables de la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$, sous le titre de *Table II*. Ayant obtenu une valeur approchée de e; comme il a été dit au n° 37, on en déduira aisément, à l'aide de la Table II, la correction $\delta(Q^2)$ à appliquer à la valeur de Q^2 fournie par la Table I; et l'on aura, par les équations (11), (8) et (3),

$$k'' = Y_0 - \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}Y_2. \quad (21)$$

Les valeurs corrigées de Q^2 et k'' pourront être appliquées au

calcul d'une valeur plus exacte de e au moyen de l'une ou de l'autre des formules (14) et (15), suivant les cas (*). Connaissant actuellement Q^2, h'', e et μ, l'emploi d'un petit nombre des formules du n° 36 fournira tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour procéder au calcul des coordonnées, rayons de courbure, poussées, etc.

CONSTRUCTION DES TABLES POUR LE CAS DES ARCHES COMPLÈTES, OU *EN ANSE DE PANIER.*

39. Nous avons vu, n° 26, comment la condition de la verticalité des tangentes extrêmes introduit une équation de condition entre les constantes, et réduit d'une unité les arbitraires du problème relatif aux arches complètes. Il est clair, si l'on se reporte aux considérations présentées n° 37, que la substitution de la constante h'' à la constante h permettra de ramener la solution du problème à la construction d'une table à simple entrée. C'est ce qui se vérifiera du reste aisément par le fait même.

L'équation de condition que nous venons de rappeler est (d'')

$$q^2 = f(f + 2h'') + 2h''e - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right)e^2:$$

en éliminant q^2 entre celle-ci et la 2e équation (3), il vient immédiatement

$$\frac{1}{2}C = f(f + 2h'') + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{h''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right)e^2,$$

(*) Nous indiquerons un moyen d'éviter le calcul de $\delta(Q^2)$, et d'obtenir néanmoins une solution exacte jusque dans les termes du deuxième ordre. Ce moyen consisterait à accepter la valeur approchée de Q^2 comme exacte, et à en déduire les valeurs de e et q^2 : procédant ensuite au calcul des coordonnées ou au tracé de l'intrados, on s'arrêterait à l'ordonnée de l'intrados réel, qui répond, soit à la flèche, soit à la demi-ouverture données, et l'on prendrait à la place de l'une d'entre elles, celle fournie par le calcul ou le tracé. A la vérité, ce ne serait pas la solution du problème proposé, mais bien celle d'un problème du même genre, dans lequel les données différeraient très-peu des données du problème primitif. Or il est très-rare que les données soient tellement bien fixées, qu'on ne puisse leur faire subir, en pratique, la très-petite variation qu'entraînerait le mode de solution qui vient d'être indiqué.

équation à laquelle il faut joindre la valeur de y''_1 obtenue n° 26,

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3} h'' \frac{e^2}{q^2}.$$

On tire de celle-ci,

$$h'' = y''_1 - f - \frac{2}{3} \frac{h''^2}{C} e^2; \tag{22}$$

cette valeur permet d'écrire C sous la forme

$$C = 2f(2y''_1 - f) + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2h''^2}{C}\right) e^2, \tag{22 bis}$$

ou bien

$$C = 2f(2y''_1 - f) + \frac{4}{3} \frac{y_1''^2}{f(2y''_1 - f)} e^2. \tag{23}$$

D'un autre côté, les équations (10) et (11) donnent

$$Y_1 - y''_1 = 2\delta_1 \cos\alpha_1:$$

or observons que $2\delta_1$ et $\cos\alpha_1$ sont des quantités du deuxième ordre; leur produit étant du quatrième, on aura donc, à des quantités près de cet ordre,

$$y''_1 = Y_1. \tag{24}$$

Maintenant, il est évident que, si l'on se donne l'ordonnée Y_1 des naissances, et l'une des quantités f et h'', on pourra, en négligeant les termes du deuxième ordre, obtenir la valeur de x''_1 à l'aide des équations (24), (22) et (23), jointes à la relation $B = C + h''^2$ et aux équations (4). La demi-ouverture g tirée de l'équation (e'') peut d'ailleurs s'écrire

$$g = x_1'' - \frac{2}{3} \frac{y''_1}{C} e^2; \tag{25}$$

elle se réduit à $q = x''_1$, lorsqu'on néglige les termes du second ordre. Ainsi la quantité g est fonction des deux variables Y_1 et f ou h''; et le rapport $\frac{g}{Y_1}$ se trouve, par suite, être fonction d'une seule variable qui est $\frac{f}{Y_1}$ ou $\frac{h''}{Y_1}$, suivant que l'on se donne l'une ou l'autre des deux variables f et h''.

La Table III insérée à la fin de ce mémoire contient, dans une première colonne, la suite des valeurs de $\frac{f}{Y_1}$, et, dans une seconde, les valeurs correspondantes de $\frac{g}{Y_1}$. Le rapport $\frac{g}{f}$ des nombres de la deuxième et de la première colonne est donné dans une troisième colonne. De cette manière notre table permet de trouver l'une des trois quantités f, g et Y_1 au moyen des deux autres. Il est vrai que, théoriquement, les valeurs tirées de la Table III sont seulement approximatives, mais nous verrons bientôt qu'en pratique, on peut les considérer comme exactes.

Les valeurs de f et h'' étant connues, du moins approximativement, il devient possible de calculer l'épaisseur e, en se donnant l'une ou l'autre des quantités μ_1 et h.

En premier lieu, soit donné μ_1 : la deuxième équation (13) fait connaître μ_0 à l'aide de μ_1. L'équation (c'') jointe à la relation $h = h'' - e$ donne

$$y_1''^2 - h''^2 = q^2 - 2h''e + \frac{2}{3}e^2,$$

et, à cause de $q^2 = 2e\mu_0$, on obtient immédiatement

$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1''^2 - h''^2}{\mu_0 - h'' + \frac{1}{3}e}. \qquad (26)$$

La valeur de e s'en déduira en négligeant d'abord le terme $\frac{1}{3}e$ au dénominateur, et y substituant ensuite sa valeur obtenue par une première approximation.

On obtiendrait aussi la valeur de e sans passer par μ_o, au moyen de la formule

$$e = \frac{1}{2} \frac{f(2y''_1 - f)}{\mu_1 - y''_1\left(1 + \frac{y''_1}{6(\mu_1 - f)}\right)}; \tag{27}$$

mais, comme la valeur de μ_o sert au calcul de q', il sera préférable d'employer l'équation (26).

Quelle que soit, au surplus, celle des deux expressions (26) et (27) dont on ait fait usage, la solution trouvée devra, pour être admissible, satisfaire à de certaines conditions. Nous ne mentionnerons pas la condition $e > 0$, attendu que les valeurs de μ_o et μ_1 seront toujours prises beaucoup plus grandes que y''_1 et h''; cette condition sera donc toujours remplie. Mais il faudra que l'on ait toujours $e < h''$, et, en outre, que la quantité $h = h'' - e$ qui en résultera, ne soit point inférieure à une limite fixée par les conditions particulières à l'établissement de la chaussée. Si ces conditions ne sont pas remplies, il faudra modifier les données. On diminuera l'épaisseur e en choisissant des matériaux plus résistants.

En second lieu, si l'on se donne la hauteur h de la surcharge, on aura immédiatement

$$e = h'' - h, \tag{28}$$

et il faudra s'assurer si la plus grande valeur de μ est compatible avec la nature des matériaux employés. A cet égard, on aura par l'équation (26),

$$\mu_o = \frac{y_1''^2 - h''^2}{2e} + h'' - \frac{1}{3} e, \tag{29}$$

et la première équation (13) fera connaître ensuite μ_1. Dans le cas où la valeur de μ_1 se trouverait être trop forte, il faudrait augmenter e et par suite h''.

La valeur de e étant supposée connue au moins approximati-

vement, nous avons à rechercher quelles corrections doivent subir les inconnues du problème déduites de la Table III.

40. Les variables f, g, Y_1, entre lesquelles la Table III établit une dépendance mutuelle, sont au nombre de trois; et l'on peut se donner deux de ces variables arbitrairement, ce qui fournit trois combinaisons distinctes : mais, la demi-ouverture g étant toujours au nombre des données, nous n'aurons à examiner que les deux combinaisons qui comprennent les deux systèmes de données g, Y_1 et g, f.

Première combinaison. — Étant donnés g et Y_1, trouver la correction de la valeur de f tirée de la Table III.

Les quantités négligées dans la construction de cette table sont faciles à rétablir, maintenant que la valeur de e est connue approximativement. Soit, en effet, δf la correction inconnue de f.

1° L'équation (22) a été appliquée en négligeant le terme du deuxième ordre et en faisant usage d'une valeur seulement approchée de f; on aura donc

$$\delta h'' = -\delta f - \frac{2}{3}\frac{h'}{C}e^2.$$

2° L'équation (22 *bis*) donne lieu à des corrections du même genre; leur somme est

$$\delta C = 4(y'_1 - f)\delta f + \frac{4}{3}\left(1 + 2\frac{h'^2}{C}\right)e^2.$$

3° La valeur de x'_1 a été calculée en négligeant le terme du deuxième ordre contenu dans A'; nous devons donc, en vertu de l'équation (4) et de la valeur de A', appliquer à x'_1 la correction spéciale

$$(\delta x'_1) = -\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\varepsilon_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}e^2.$$

4° Le terme du deuxième ordre ayant été négligé dans l'équa-

tion (25), si nous désignons par $\delta x''_1$ la correction de x''_1 qui résulte de celles que nous venons d'indiquer, et que nous observions que g doit conserver une valeur constante et donnée, nous aurons

$$\delta x''_1 - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0.$$

Or, x''_1 peut être considéré comme une fonction des deux variables h'' et C, données par les équations (22) et (23), puisque f n'entre dans x''_1 que par ces variables; et l'équation précédente devient

$$(\delta x''_1) + \frac{dx''_1}{dh''}\delta h'' + \frac{dx''_1}{dC}\delta C - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0,$$

ou, en mettant pour $(\delta x''_1)$, $\delta h''$ et δC leurs valeurs,

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \frac{h''}{C}\frac{dx''_1}{dh''} - 2\left[1 + 2\frac{h''^2}{C}\right]\frac{dx''_1}{dC} + \frac{y''_1}{C}\right)e^2$$
$$+\left[4(y''_1 - f)\frac{dx''_1}{dC} - \frac{dx''_1}{dh''}\right]\delta f = 0;$$

on en tire

$$\frac{\delta f}{e^2} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} + \dfrac{h''}{C}\dfrac{dx''_1}{dh''} - 2\left(1 + 2\dfrac{h''^2}{C}\right)\dfrac{dx''_1}{dC}}{4(y''_1 - f)\dfrac{dx''_1}{dC} - \dfrac{dx''_1}{dh''}}$$

On peut encore utiliser ici les différences obtenues en calculant la Table III, pour éviter le calcul direct de la dérivée $\frac{dx''_1}{dh''}$. En effet, puisque x''_1 est fonction de h'' et C, on a

$$dx''_1 = \frac{dx''_1}{dh''}dh'' + \frac{dx''_1}{dC}dC;$$

et, comme h'' et C sont d'ailleurs fonctions de la seule variable f,

en vertu des équations (22) et (23) privées de leurs termes du deuxième ordre, on a, pour expression de la dérivée totale,

$$\frac{dx''_1}{df} = \frac{dx''_1}{dh''}\,\frac{dh''}{df} + \frac{dx''_1}{dC}\,\frac{dC}{df},$$

ou, en vertu des mêmes équations,

$$\frac{dx''_1}{df} = 4\,(y''_1 - f)\,\frac{dx''_1}{dC} - \frac{dx''_1}{dh''}.$$

La valeur de la dérivée partielle $\frac{dx''_1}{dh''}$ qu'on en tire étant portée dans celle de $\frac{\delta f}{\varepsilon^2}$, il vient, à cause de $h'' = y''_1 - f$,

$$\frac{\delta f}{\varepsilon^2} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} - \dfrac{h''}{C}\,\dfrac{dx''_1}{df} - 2\,\dfrac{dx''_1}{dC}}{\dfrac{dx''_1}{df}}. \tag{30}$$

Il est clair que, y''_1 étant constant, on peut substituer à la dérivée $\frac{dx''_1}{df}$, la dérivée $\dfrac{d\frac{g}{Y_1}}{d\frac{f}{Y_1}}$ qui se déduit immédiatement des différences fournies par la Table III. Quant à la dérivée $\frac{dx''_1}{dC}$, nous en avons donné l'expression, (18). Cette expression et quelques-unes de celles qui servent à calculer x''_1 ou g reçoivent des simplifications provenant de la condition particulière aux arches complètes (*); nous nous dispenserons de les présenter ici, attendu que

(*) Les quantités h'' et C (22) et (23), étant privées de leurs termes du deuxième ordre, fournissent aisément la relation

$$B - y_1''^2 = \frac{1}{2}C,$$

qui permet de simplifier le calcul de x''_1 et de ses dérivées partielles, dans le cas des arches complètes.

nos tables n'ont pas besoin d'être étendues au delà des limites que nous leur avons données, et que, sauf cette application, l'exposé des formules serait sans objet.

Deuxième combinaison. — Étant donnés f et g, trouver la correction de la valeur de Y_1 tirée de la Table III. Soit δY_1 la correction cherchée.

1° A cause de $y''_1 = Y_1$, on tire de l'équation (22)

$$\delta h'' = \delta Y_1 - \frac{2}{3}\frac{h''}{C}e^2.$$

2° L'équation (22 *bis*) donne

$$\delta C = 4f\,\delta Y_1 + \frac{4}{3}\left(1 + 2\frac{h''^2}{C}\right)e^2.$$

3° La valeur de x''_1 doit, comme plus haut, recevoir la correction spéciale

$$(\delta x''_1) = -\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}e^2,$$

à cause du terme du deuxième ordre négligé dans A'.

4° g étant donné, et $\delta x''_1$ désignant l'ensemble des corrections que doit subir x''_1, l'équation (25) donne encore

$$\delta x''_1 - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0.$$

Or, x''_1 se trouve être ici fonction des deux variables h'' et C, si l'on conçoit y''_1 remplacé par sa valeur $h'' + f$, équation (22); il s'ensuit que l'équation précédente peut s'écrire

$$(\delta x''_1) + \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)\delta h'' + \frac{dx''_1}{dC}\delta C - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0,$$

$\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$ désignant la dérivée partielle de x''_1 relative à h'', et prise

en faisant abstraction de ce que C dépend implicitement de h''. Substituons les valeurs précédentes, il viendra

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}+\frac{h''}{C}\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)-2\left[1+2\frac{h''^2}{C}\right]\frac{dx''_1}{dC}+\frac{y''_1}{C}\right)e^2$$
$$+\left[\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\frac{dx''_1}{dC}\right]\delta Y_1=0,$$

d'où

$$\frac{\delta Y_1}{e^2}=\frac{2}{3}\,\frac{\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}+\frac{y''_1}{C}+\frac{h''}{C}\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)-2\left(1+2\frac{h''^2}{C}\right)\frac{dx''_1}{dC}}{\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\frac{dx''_1}{dC}}.$$

Voici maintenant comment on utilisera les différences obtenues dans la construction de la Table III, pour éviter le calcul de la dérivée $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$. D'après ce qui a été dit il y a un instant, on a

$$dx''_1=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)dh''+\frac{dx''_1}{dC}\,dC:$$

on en tire, pour la valeur de la dérivée totale de x'', par rapport à h'', puisque cette quantité reste seule variable indépendante,

$$\frac{dx''_1}{dh''}=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+\frac{dx''_1}{dC}\,\frac{dC}{dh''};$$

or, on a

$$\frac{dC}{dh''}=\frac{dC}{dy''_1}\,\frac{dy''_1}{dh''}=4f,$$

en vertu des équations (22 *bis*) et (22): il vient donc

$$\frac{dx''_1}{dh''}=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\frac{dx''_1}{dC},$$

et, par suite,

$$\frac{\delta Y_1}{e''} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} + \dfrac{h''}{C}\dfrac{dx''_1}{dh''} - 2\left(1+2\dfrac{h''y''_1}{C}\right)\dfrac{dx''_1}{dC}}{\dfrac{dx''_1}{dh''}}, \qquad (31)$$

en mettant y''_1 à la place de $f + h''$.

Maintenant, soient

$$z = \frac{x''_1}{y''_1}, \qquad \zeta = \frac{f}{y''_1},$$

valeurs auxquelles on peut substituer les rapports $\frac{g}{Y_1}$ et $\frac{f}{Y_1}$. Le premier de ces rapports étant une fonction du second considéré comme variable indépendante, qui est donnée par la Table III, on aura

$$dz = \frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta,$$

et la valeur du coefficient différentiel $\frac{dz}{d\zeta}$ se déduira des différences successives de la quantité $\frac{g}{Y_1}$ et de la différence constante des valeurs de $\frac{f}{Y_1}$. Mais, f étant une constante donnée, on a

$$dz = \frac{y''_1\,dx''_1 - x''_1\,dy''_1}{y''^2_1}, \qquad d\zeta = -\frac{f}{y''^2_1}\,dy''_1;$$

substituant ces valeurs dans la précédente équation, on en tire

$$y''_1\,dx''_1 = \left(x''_1 - f\frac{dz}{d\zeta}\right)dy''_1,$$

d'où, à cause de $\frac{dy''_1}{dh''} = 1$,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \frac{x''_1 - f\dfrac{dz}{d\zeta}}{y''_1} = \frac{g}{Y_1} - \frac{f}{Y_1}\,\frac{d\dfrac{g}{Y_1}}{d\dfrac{f}{Y_1}}. \qquad (32)$$

On obtiendrait une expression encore plus simple de la valeur de $\frac{dx''_1}{dk''}$, en posant

$$z' = \frac{x''_1}{f}, \qquad \zeta = \frac{f}{y''_1}.$$

(Les quantités z' et ζ désignent ici les nombres contenus dans la troisième et la première colonne de la Table III.) Ces relations donnent

$$dz' = \frac{1}{f}\,dx''_1, \qquad d\zeta = -\frac{f}{y''^2_1}\,dy''_1;$$

et l'on a, à cause de $dz' = \frac{dz'}{d\zeta}\,d\zeta$,

$$\frac{1}{f}\,dx''_1 = -\frac{f}{y''^2_1}\,\frac{dz'}{d\zeta}\,dy''_1,$$

d'où, en vertu de $\frac{dy''_1}{dk''} = 1$,

$$\frac{dx''_1}{dk''} = -\frac{f^2}{y''^2_1}\,\frac{dz'}{d\zeta} = -\frac{f^2}{Y_1^2}\,\frac{d\frac{g}{f}}{d\frac{f}{Y_1}}. \qquad (33)$$

Nous n'avons pas fait usage de cette formule, parce que la fonction $\frac{g}{f}$ n'était pas encore calculée, quand nous avons entrepris le calcul de la Table V, qui donne la valeur de $Y_1\,\frac{\delta Y_1}{\epsilon^2}$.

Les expressions (32) et (33) sont, comme on le voit, entièrement formées de quantités que l'on peut déduire aisément de la Table III. En joignant l'une ou l'autre à la deuxième équation (18), on a tous les éléments nécessaires pour calculer $\frac{\delta Y_1}{\epsilon^2}$ à l'aide de la formule (31).

Les deux formules (30) et (31) ont été appliquées au calcul des deux Tables IV et V, qui donnent, l'une les valeurs de $\frac{Y_1}{\epsilon^2}\,\delta f$, et l'autre celles de $\frac{Y_1}{\epsilon^2}\,\delta Y_1$. Ces deux tables ont été placées à la suite de

la Table III. Nous les avons insérées dans ce mémoire, non pour en recommander l'usage, mais pour montrer, au contraire, que l'on peut se dispenser d'y recourir, attendu que les corrections que l'on en tire sont tout à fait négligeables dans la pratique. En effet, la plus grande valeur de $\frac{Y_1}{e^2}\delta f$ donnée par la Table IV, est $+0{,}0005$; elle se rapporte à $\frac{f}{Y_1} = 0{,}67$: on en déduit $\delta f = 0{,}0005\,\frac{e^2}{Y_1^2}\,Y_1$; à cause de $e < h''$, il vient $\delta f < 0{,}0005\,\frac{h''^2}{Y_1^2}\,Y_1$: or, $\frac{h''}{Y_1} = 1 - \frac{f}{Y_1}$ est ici égal à $0{,}33$, on a donc $\delta f < 0{,}0005\,(0{,}33)^2\,Y_1$, ou $\delta f < 0{,}000054\,Y_1$. Si l'on suppose, par exemple, $Y_1 = 18^m{,}5$, quantité qui n'est pas atteinte dans les constructions modernes, on aura $\delta f < 0^m{,}001$. On aurait de même, par la Table V, avec ces données, $-\delta Y_1 < 0^m{,}0048$. Nous ferons observer que ces nombres se rapportent à des surbaissements inusités : la limite de surbaissement admise dans la pratique est $\frac{1}{3}$; encore convient-il mieux de prendre le surbaissement entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Or le surbaissement $\frac{1}{3}$ répond à une valeur de $\frac{f}{Y_1}$ égale à $0{,}733$ environ, d'après la Table III; en partant de ce nombre, et supposant $Y_1 = 18^m{,}5$, on trouverait $\delta f < 0^m{,}00026$; $-\delta Y_1 < 0^m{,}0012$. Les surbaissements plus voisins de $\frac{1}{4}$ donneraient des corrections encore plus faibles. On voit donc que, dans les limites de la pratique, on n'aura pas à craindre de faire une erreur de plus de 1 millimètre, ou à peu près, sur des différences de niveau qui seront à peine déterminées d'ailleurs à ce degré d'approximation, lorsqu'on se dispensera de corriger les valeurs tirées de la Table III (*).

(*) Si l'on tenait à appliquer les corrections de f ou Y_1, on se servirait, pour les calculer, de nombres fournis par les Tables IV et V, et de la valeur approchée de e obtenue au n° 39. A l'aide de la valeur corrigée de f ou de $Y_1 = y''_1$, on calculerait au besoin la valeur corrigée de h'', par la formule (22) mise sous la forme

$$h'' = y''_1 - f - \frac{1}{3}\,\frac{h''}{f\,(2y''_1 - f)}\,e^2;$$

on aurait ensuite e par l'équation (26) ou par l'équation (27) jointe à la deuxième

POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF CONTRE LES CULÉES, INCLINAISON DU DERNIER JOINT SUR LA VERTICALE, VOLUME D'UNE DEMI-ARCHE ET DE LA PARTIE CORRESPONDANTE DU MASSIF.

41. La réduction des formules du n° 28 est très-simple ; nous nous contenterons d'en présenter les résultats, renvoyant à ce numéro pour tout ce qui est relatif à l'exposé et à la discussion.

Les équations réduites qui donnent la valeur générale de l'angle α ont déjà été présentées n° 36 ; nous reproduirons l'expression de la tangente, en y mettant à la place de y'' l'ordonnée y''_1 du point inférieur de l'intrados fictif, et pour A sa valeur (3) : on aura ainsi, pour déterminer l'angle α_1 du dernier joint avec la verticale, la formule

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sqrt{(y_1''^2 - h''^2)(B - y_1''^2)}}{q^2 + (h'' - e)^2 - y_1''^2}, \qquad (34)$$

à laquelle on pourra trouver plus commode de substituer les deux suivantes :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha'_1 = \sqrt{\frac{y_1''^2 - h''^2}{C}}, \qquad \sin(\alpha_1 - \alpha'_1) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'_1. \qquad (34\ bis)$$

Ces formules serviront particulièrement dans le cas des arches incomplètes, dites *en arc de cercle*, et la valeur de y''_1 qu'il conviendra d'employer est celle donnée sous la marque (w''),

$$y''_1 = f + h'' - \frac{1}{3}f\left[1 - \frac{(f + h'')(f + 2h'')}{q^2}\right]\frac{e^2}{q^2}. \qquad (35)$$

(On évitera l'emploi de ces formules en déduisant l'angle α_1 par voie d'interpolation, lorsque les calculs ou tracés qui vont être indiqués dans les numéros suivants auront été effectués.)

équation (13) ; et dans le cas de h donné, par la relation $e = h'' - h$. Disons enfin que les quantités $Q^2 = \frac{3}{4}C$ et $q^2 = 2e\mu_0$, nécessaires pour le calcul des coordonnées et le tracé, s'obtiendraient à l'aide des formules (23) et (13), si la valeur de μ_0 ne se trouvait pas déjà déterminée.

Dans le cas des arches complètes ou *en anse de panier*, on aura simplement

$$\cot\alpha_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}. \tag{36}$$

Pour obtenir les diverses coordonnées qui se rapportent au plan de joint extrême, on aura d'abord

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}(f + h'')\frac{e^2}{q^2}, \tag{37}$$

puis ensuite

$$x''_1 = g + 2\delta_1 \sin\alpha_1, \tag{38}$$

équation à laquelle on joindra la valeur précédente de y''_1 dans le cas des arches incomplètes; mais, dans le cas des arches complètes, il sera plus court d'employer les valeurs suivantes, tirées des relations obtenues n° 26:

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= g + \frac{1}{3}(f + h'')\frac{e^2}{q^2}, \\ y''_1 &= f + h'' + \frac{1}{3}h''\frac{e^2}{q^2}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Les piles ou culées sont soumises à l'action des pressions qui ont lieu dans le joint inférieur; la résultante de ces pressions, perpendiculaire au plan de ce joint, est

$$T_1 = \varpi\lambda e\mu_1, \tag{40}$$

et passe par le point dont les coordonnées sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x''_1 + \frac{1}{2}e\sin\alpha_1, \\ y_1 &= y''_1 - \frac{1}{2}e\cos\alpha_1. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Les composantes horizontale et verticale de T_1 sont d'ailleurs $T_1\cos\alpha_1$ et $T_1\sin\alpha_1$.

Les culées reçoivent en outre les actions horizontales exercées

par le massif qu'elles encaissent. La résultante de ces actions dépend des ordonnées des points supérieur et inférieur de l'extrados, qui sont

$$\left.\begin{array}{l} y'_0 = h, \\ y'_1 = y''_1 - e\cos\alpha_1. \end{array}\right\} \quad (42)$$

La valeur de cette résultante est

$$U = \varpi\lambda\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2); \qquad (43)$$

elle agit horizontalement dans le plan qui a pour ordonnée

$$u = \frac{\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3)}{\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2)} = \frac{2}{3}\,\frac{y_1'^2 + y'_1 y'_0 + y_0'^2}{y'_1 + y'_0}. \qquad (44)$$

Enfin, le volume V des matériaux de la demi-arche et de la partie du massif limitée horizontalement par des plans verticaux menés par les génératrices du sommet et du point inférieur de l'extrados, s'obtiendra en observant que le poids ϖV de ce volume est égal à la composante verticale $T_1 \sin\alpha_1$; on aura donc

$$V = \lambda e \mu_1 \sin\alpha_1, \qquad (45)$$

expression dans laquelle $\sin\alpha_1$ pourra être pris égal à 1, lorsqu'il s'agira d'arches complètes.

A l'égard des piles, nous rappellerons que, si les extrados des deux arches voisines ne se coupent pas au-dessus des derniers plans de joint, ou si, en d'autres termes, ceux-ci conservent leur largeur, les assises horizontales des piles, à leur partie supérieure, seront soumises à des pressions verticales représentées par des hauteurs qui n'excéderont pas μ_1; en sorte que, les piles étant supposées construites de matériaux aussi résistants que ceux de la voûte, il suffira, pour qu'elles résistent au poids des voûtes et du massif, que leur largeur ne soit pas inférieure à la somme

des projections horizontales des joints des naissances. L'excès de largeur à leur donner dépendra de l'action de causes étrangères, telles que celle de l'eau dans les grandes crues, etc.

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISON DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS, ETC.

42. Nous renverrons au n° 29 pour ce qui est relatif à l'objet même des calculs; nous présenterons immédiatement l'expression du rayon de courbure de l'intrados fictif réduite en vertu de l'hypothèse $i = 1$. La formule (s''), en ayant égard à la valeur de Q^2 tirée de la deuxième équation (3), se réduit à

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos\alpha}{y''}. \qquad (46)$$

Nous profiterons de la forme simple de cette expression, pour obtenir une valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ beaucoup plus approchée que celle à laquelle se réduirait notre formule (t'') en y faisant $i = 1$.

L'expression de ρ'' donne

$$\rho'' y'' = Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos\alpha.$$

On aura également en un autre point où la normale fait l'angle $\alpha + \Delta\alpha$ avec la verticale,

$$(\rho'' + \Delta\rho'')(y'' + \Delta y'') = Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos(\alpha + \Delta\alpha).$$

Cette équation et la précédente donnent par soustraction

$$\begin{aligned}(y'' + \Delta y'')\Delta\rho'' + \rho''\Delta y'' &= -\frac{1}{3} e^2 [\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos\alpha] \\ &= +\frac{2}{3} e^2 \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha.\end{aligned}$$

de celle-ci, on tire exactement

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''\Delta y'' - \frac{2}{3}e^2\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha}{y'' + \Delta y''}.$$

Si, maintenant, on substitue à $\Delta y''$ sa valeur approchée

$$\Delta y'' = \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,$$

et que l'on remplace au numérateur $2\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha$ par $\Delta\alpha$, il viendra

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''\left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right) - \frac{1}{3}e^2}{y'' + \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.$$

Faisant disparaître le dénominateur, et rangeant $\Delta\rho''^2$ avec les quantités connues, on en déduit

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''^2 - \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{2}\Delta\rho''^2}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.$$

On voit qu'en négligeant e^2 et $\Delta\rho''^2$, on ne négligera dans $\Delta\rho''$ que des termes du troisième ordre; les erreurs qui en résulteront se compenseront en partie, puisque les termes négligés sont de signes contraires (*). De cette manière il vient simplement

$$\tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = -\frac{\frac{1}{2}\rho''^2\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha},$$

(*) On éviterait l'erreur que nous négligeons, en prenant ρ'' pour variable indépendante au lieu de α, et faisant $\Delta\rho'' = -e\sqrt{\frac{2}{3}}$; dans ce cas, à cause de

d'où, en ajoutant ρ'' aux deux membres et réduisant,

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}. \qquad (47)$$

Cette valeur est très-approchée; elle ne donne que 7 à 8 millimètres d'erreur sur des rayons de courbure de 60 mètres environ, et dans l'hypothèse de $\Delta\alpha = 2°$.

On peut obtenir d'autres expressions de même forme, et qui diffèrent de la précédente en ce que les deux facteurs 1 et $\frac{3}{2}$ de ρ'' au numérateur et au dénominateur, sont remplacés respectivement par $\frac{1}{2}$ et 1, ou même par 0 et $\frac{1}{2}$.

Voici l'usage de cette formule : en partant des valeurs initiales de α, y'' et x'', qui sont respectivement zéro, h'' et zéro, et faisant varier l'angle α d'une quantité $\Delta\alpha$ égale à 2° ou 3°, les accroissements correspondants de y'' et x'' se déduiront de la valeur de ρ'' et de celle de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, jointes aux deux suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y'' &= \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha, \\ \Delta x'' &= \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha. \end{aligned}\right\} (48)$$

$\Delta\cos\alpha = -2\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha$, l'équation précédente donnerait très-approximativement

$$\Delta\cos\alpha = \frac{y''}{\rho''}\frac{\Delta\rho''}{\rho'' + \frac{3}{2}\Delta\rho''}.$$

L'emploi de cette formule exigerait le recours aux Tables de sinus naturels; elle serait facile à appliquer de $\alpha = 0°$ à $\alpha = 90°$; mais, entre 90° et 180°, on ne pourrait s'en servir qu'autant que la constante $\frac{3}{2}\Delta\rho''$ aurait une valeur absolue inférieure au minimum de ρ''. Entre 180° et 360°, il faudrait faire $\Delta\rho'' = +e\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Non-seulement la valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ sert à obtenir $\Delta y''$ et $\Delta x''$; mais elle offre en même temps un précieux moyen de vérifier les calculs successifs de ρ'' et y''. En effet, ayant obtenu, au moyen de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, la différence $\Delta y''$; celle-ci ajoutée à y'' fera connaître la nouvelle ordonnée $y'' + \Delta y''$ du point où la normale fait avec la verticale l'angle $\alpha + \Delta\alpha$: et, si l'on calcule à l'aide de cette ordonnée la nouvelle valeur du rayon de courbure, et que l'on fasse la demi-somme de cette valeur et de celle de ρ'' d'où l'on est parti, on obtiendra un résultat qui coïnciderait avec $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ si nos formules étaient rigoureusement exactes. Dans tous les cas, on prendra la différence entre $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ et la moyenne dont nous venons de parler. Cette différence ou erreur, qui prendra un signe déterminé suivant le sens de la soustraction, devra être très-faible, et sensiblement nulle au sommet de l'intrados; mais, si l'on détermine de la sorte plusieurs erreurs consécutives, en faisant varier chaque fois l'angle α de la quantité constante $\Delta\alpha$, il faudra que la marche de ces erreurs présente une régularité facile à reconnaître; autrement on serait averti de l'existence de fautes matérielles dans le calcul.

A l'aide des valeurs obtenues de α, y'' et x'', les équations (8) et (9) permettront de calculer l'épaisseur variable s et les coordonnées de l'intrados réel et de l'extrados. On pourra vérifier ces dernières quantités et l'abscisse x'', en prenant leurs différences successives.

Nous observerons qu'il n'est pas nécessaire de conserver la même valeur de $\Delta\alpha$ dans toute la suite des calculs. S'il s'agit, par exemple, d'une arche complète, où l'angle α atteint sensiblement 90°, on pourra, à partir de 30° ou environ, augmenter l'intervalle $\Delta\alpha$ de moitié, sans inconvénient, si l'intervalle primitif s'est trouvé être assez petit de 0° à 30°; on pourrait même, à partir de 60°, doubler la valeur primitive de $\Delta\alpha$. Les trois séries de calculs devraient alors être vérifiées séparément.

SIMPLIFICATION DU TRACÉ DE L'INTRADOS FICTIF AU MOYEN DE SON RAYON DE COURBURE.

43. L'hypothèse ($i = 1$) réduit la valeur de q', n° 30, a

$$q' = q - 2\frac{e}{q}\left(h'' - \frac{2}{3}e\right) = 2\frac{Q'}{q}, \quad (49)$$

et celles de β et b à zéro. En même temps, la quantité a devient

$$a = \frac{2}{3}\frac{e^2}{q}. \quad (50)$$

La forme qui en résulte pour l'équation du rayon de courbure de l'intrados fictif appropriée à la construction géométrique est

$$\rho'' = \frac{1}{2}q\frac{q' - a\cos\alpha}{y'}. \quad (51)$$

Nous allons indiquer sommairement la construction dont il s'agit.

Ayant mené deux axes rectangulaires, l'un OX horizontal, l'autre OY vertical, on fixera le sommet de l'intrados fictif sur l'axe des y, à la distance $\overline{OS} = h' = h + e$. On marquera sur le prolongement de OX un point Q, à la distance $\overline{OQ} = \frac{1}{2}q$, et sur OY un autre point Q', à la distance $\overline{OQ'} = q'$. Supposons, pour plus de généralité, la construction de l'intrados fictif parvenue en un point I par lequel est menée la normale IN. Prenant sur cette normale la distance $\overline{II'} = a$ vers l'extrados, et projetant les points I et I' sur l'axe des y en P et P', on aura $\overline{OP} = y''$ et $\overline{PP'} = a \cos \alpha$. On portera cette longueur PP' supposée positive, de Q' en p' vers l'origine O, la distance Op' sera égale à la quantité $q' - a \cos \alpha$. Si, ayant rabattu le point P sur le prolongement de l'axe des x en P''', on joint ensuite P'''p', et que l'on mène QR parallèle à P'''p', la droite $\overline{OR}$ sera égale au rayon de courbure qu'il s'agissait de construire. En effet, les triangles semblables QOR, P'''Op' donnent la relation

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{Op'}}{\overline{OP'''}},$$

qui coïncide avec l'équation (51) mise sous la forme

$$\frac{\rho''}{\frac{1}{2}q} = \frac{q' - a \cos \alpha}{y''}.$$

Portant $\overline{OR}$ de I en C sur la normale, le point C sera le centre de courbure de l'intrados fictif et de l'extrados à la fois, puisque ces deux courbes sont parallèles; pour construire l'extrados, on portera la distance e qui les sépare de I en E.

La construction de l'intrados réel résultera de celle des épaisseurs vraies ε; leur expression est

$$\varepsilon = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} y''. \quad (52)$$

Prenons à cet effet, sur l'axe des x, $\overline{OE'} = e$, et menons par le

point E' une droite E'E', parallèle à OY; menons encore, par le même point, une autre droite E'E'' faisant avec la première, et dans le sens indiqué par la figure, un angle dont la tangente soit $\frac{4}{3}\frac{e^{1}}{\varphi}$: l'abscisse PJ du point J de la droite E'E'', qui a pour ordonnée y'', sera égale à l'épaisseur réelle ε du joint qui répond à IN. Si l'on porte donc sur la normale la longueur $Ei = PJ$ de E en i, le point i appartiendra à l'intrados réel.

Il nous paraît suffisant d'avoir repris la construction simplifiée du rayon de courbure; nous renverrons, quant à l'usage qu'il convient d'en faire, au n° 30 qui contient déjà les indications nécessaires à cet égard.

DONNÉES EXPÉRIMENTALES RELATIVES À LA LIMITE DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX EMPLOYÉS DANS LES CONSTRUCTIONS.

44. Nous nous sommes assez longuement étendu, nos 6 et 23, sur la convenance qu'il y a de substituer dans les formules, aux charges par unité de surface, la hauteur d'une colonne prismatique de la matière employée, dont le poids produirait sur une surface horizontale la charge ou la pression qui a effectivement lieu : nous ne reviendrons pas sur ce sujet. Rappelant seulement que cette hauteur a été désignée par μ, et qu'elle est liée à la pression t par unité de surface, et au poids ϖ de l'unité de volume par la relation

$$\mu = \frac{t}{\varpi},$$

nous allons présenter un tableau des diverses valeurs que prend cette quantité μ, dans les expériences où l'on produit l'écrasement des matériaux, et au moment de cet écrasement.

Nous extrayons les données de ce tableau de l'*Introduction à la Mécanique industrielle* de M. Poncelet (p. 308); mais nous substituons aux densités le poids ϖ du mètre cube. Pour déduire μ de ces données, il a suffi de multiplier par 10000 les résistances

relatives au centimètre carré et de diviser ensuite par ϖ, ce qui revenait à multiplier par 10 le quotient de la résistance par centimètre carré divisée par la densité. De cette manière nous avons formé le tableau suivant :

MATÉRIAUX SOUMIS À L'ÉCRASEMENT.	POIDS du mètre cube.	CHARGE par centimètre carré.	VALEUR de μ au moment de l'écrasement.
Pierres volcaniques, granitiques, siliceuses et argileuses.	kil.	kil.	m
Basaltes de Suède et d'Auvergne	2 950	2 000	6 780
Lave du Vésuve	2 600	590	2 269
Lave tendre de Naples	1 970	230	1 167
Porphyre	2 870	2 470	8 606
Granit vert des Vosges	2 850	620	2 179
Granit gris de Bretagne	2 740	650	2 372
Granit de Normandie	2 660	700	2 632
Granit gris des Vosges	2 640	420	1 591
Grès très-dur, blanc ou roussâtre	2 500	870	3 480
Grès tendre	2 490	4	16
Pierre porc ou puante (argileuse)	2 660	680	2 556
Pierre grise de Florence	2 560	420	1 641
Pierres calcaires.			
Marbre noir de Florence	2 720	790	2 904
Marbre blanc veiné, statuaire et turquin	2 690	310	1 152
Pierre noire de St-Fortunat, très-dure et coquilleuse	2 650	630	2 377
Roche de Châtillon, dure et un peu coquilleuse	2 290	170	742
Liais de Bagneux, très-dur et à grain fin	2 440	440	1 803
Roche douce de Bagneux	2 080	130	625
Roche d'Arcueil	2 300	250	1 087
Pierre de Saillancourt. 1re qualité	2 410	140	581
Pierre de Saillancourt. 2e qualité	2 100	90	429
Pierre ferme de Conflans	2 070	90	435
Pierre tendre (lambourde et vergelée) employée à Paris, résistant à l'eau	1 820	60	329
Lambourde de qualité inférieure, résistant mal à l'eau	1 560	20	128
Calcaire dur de Givry	2 360	310	1 314

MATÉRIAUX SOUMIS À L'ÉCRASEMENT.	POIDS du mètre cube.	CHARGE par centimètre carré.	VALEUR de μ au moment de l'écrasement.
	kil.	kil.	m.
Calcaire tendre de Givry	2 070	120	580
Calcaire jaune oolithique de Jaumont, près Metz — 1re qualité	2 300	180	818
Calcaire jaune oolithique de Jaumont, près Metz — 2e qualité	2 000	120	600
Calcaire jaune oolithique d'Amanvilliers, près Metz — 1re qualité	2 000	120	600
Calcaire jaune oolithique d'Amanvilliers, près Metz — 2e qualité	2 000	100	500
Roche vive de Saulny, près Metz (non rompue)	2 550	300	1 174
Roche jaune de Rozéreuilles, près Metz	2 400	180	750
Calcaire bleu à graphite, donnant la chaux hydraulique de Metz (non rompue)	2 600	300	1 154
Briques.			
Brique dure, très-cuite	1 560	150	961
Brique rouge	2 170	60	276
Brique rouge pâle (probablement mal cuite)	2 090	40	191
Brique de Hammersmith	»	70	»
Brique de Hammersmith, brûlée ou vitrifiée	»	100	»
Plâtres et mortiers.			
Plâtre gâché à l'eau	»	50	»
Plâtre gâché au lait de chaux	»	73	»
Mortier ordinaire en chaux et sable	1 600	35	219
Mortier en ciment ou tuileaux pilés	1 460	48	329
Mortier en grès pilé	1 680	29	172
Mortier en pouzzolane de Naples et de Rome	1 460	37	253
Enduit d'une conserve antique près de Rome	1 550	76	490
Enduit en ciment des démolitions de la Bastille	1 490	55	369

Beaucoup d'ingénieurs expérimentés admettent comme étant dans de bonnes conditions les constructions où les charges permanentes n'excèdent pas le dixième de celles qui produiraient la rupture instantanée, c'est-à-dire celles où la valeur maximum de μ n'excède pas le dixième des valeurs de μ insérées au précédent

tableau. En se reportant aux pierres calcaires autres que les marbres et pierres noires, mais fermes et de bonne qualité, on verra que les valeurs correspondantes de μ réduites au dixième, sont à peu près comprises entre 180 mètres et 43 mètres, limites qui se rapportent : la première au liais de Bagneux, la seconde à la pierre de Saillancourt deuxième qualité. La limite 100 mètres résultant des chiffres admis par Navier, tient presque le milieu entre les deux nombres précédents. Si la charge permanente peut, dans tous les cas où l'on emploie des pierres de fort échantillon, être portée au dixième de la charge de rupture, on voit que l'emploi de pierres aussi résistantes que le liais de Bagneux permettrait de s'écarter beaucoup de la limite proposée par Navier; et aussi, combien il serait prudent de se tenir au-dessous de cette limite, s'il s'agissait de construire une arche avec des pierres calcaires telles que celles de Saillancourt ou de Conflans.

Dans le cas de forts échantillons, la valeur de μ, qui répond au joint inférieur d'une arche de pont devrait donc se trouver au plus égale au $\frac{1}{10}$ de la valeur de μ donnée au tableau; et dans le cas de faibles échantillons, elle n'en devrait pas atteindre le $\frac{1}{15}$ ou le $\frac{1}{20}$. (Voir la *Mécanique industrielle* de M. Poncelet, n° 264.)

RÉSUMÉ

CONCERNANT L'ÉTABLISSEMENT DES ARCHES DE PONT DANS LESQUELLES LA VOÛTE ET LE MASSIF PEUVENT ÊTRE SUPPOSÉS D'ÉGALE DENSITÉ.

45. Nous nous proposons de présenter ici, d'une manière succincte, la suite des opérations à effectuer pour déterminer complétement une arche de pont, afin que les ingénieurs qui n'auraient pas lu notre mémoire, ou qui, l'ayant lu, auraient perdu de vue la marche que nous avons suivie, puissent cependant procéder sans difficulté aux diverses opérations qui se rattachent à l'établissement des arches de pont. Si, pour ne pas augmenter le nombre déjà considérable des répétitions, il nous arrive de renvoyer à

certains chapitres du mémoire, nous aimons à croire que le lecteur pourra comprendre sans peine ce qui fera l'objet du renvoi.

Les notations ayant été reproduites au commencement du n° 36, nous renverrons à ce numéro pour ce qui les concerne.

Dans les applications, on connait ordinairement les épaisseurs des diverses couches de matériaux de densités différentes de celle du massif; qui forment la chaussée proprement dite; on devra commencer par calculer l'épaisseur d'une couche ayant la densité du massif, et dont le poids serait égal au poids des diverses couches dont nous venons de parler. L'axe des x devra être placé au-dessous du niveau de la chaussée, d'une quantité égale à la différence entre l'épaisseur totale des couches données et l'épaisseur calculée, cette dernière étant supposée la plus petite; dans le cas contraire, il faudrait placer l'axe des x plus haut que le niveau de la chaussée, d'une quantité égale à la même différence.

USAGE DES TABLES.

Arches incomplètes, dites *en arc de cercle.* — Les données sont: f la flèche, g la demi-ouverture, et Y_0 l'ordonnée du sommet de l'intrados réel. (Si l'on se donnait l'ordonnée Y_1 des naissances, au lieu de Y_0, on en déduirait $Y_0 = Y_1 - f$). A l'aide de ces données, on calculera les rapports $\frac{g}{f}$ et $\frac{Y_0}{f}$; et la Table I (fin du mémoire) fera connaître, par voie d'interpolation, la valeur approchée de $\frac{Q^2}{f^2}$, d'où l'on déduira celle de Q^2.

Pour corriger la valeur approchée de Q^2, il faut obtenir une valeur approchée de l'épaisseur fictive e. La détermination de cette dernière dépend d'une nouvelle donnée, qui est l'une ou l'autre des quantités μ_1 et h.

1° Soit donnée la quantité μ_1 qui mesure l'intensité des pressions dans le joint des naissances, et que l'on pourra prendre égale au [illegible]/10 de la valeur de μ inscrite à la dernière colonne du tableau du n° 44, si les matériaux dont on dispose sont compris

dans ce tableau (autrement il faudrait déterminer μ_1 par des expériences spéciales) : on fera

$$h'' = Y_0; \tag{o}$$

puis, on aura

$$\mu_0 = \mu_1 - f - \frac{f(f + 2h'')}{3(\mu_1 - f)}, \tag{I}$$

$$e = \frac{Q^2}{\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e}. \tag{II}$$

Le calcul de e se fera en négligeant d'abord $\frac{2}{3}e$ au dénominateur du deuxième membre, et mettant ensuite dans ce dénominateur, à la place de e, sa valeur trouvée; la seconde valeur obtenue sera d'une exactitude suffisante. Pour que cette valeur de e soit admissible, il faudra que la quantité $h = h'' - e$ qu'on en tirera ne soit pas négative, et soit au moins égale à celle que réclame la pratique.

2° Soit donné h au lieu de μ_1, on aura

$$\varepsilon_0 = Y_0 - h, \qquad h'' = Y_0, \qquad e = h'' - h, \tag{III}$$

et l'on pourra ne calculer les valeurs exactes de μ_0 et μ_1 par les formules

$$\mu_0 = h'' + \frac{Q^2}{e} - \frac{2}{3}e, \qquad \mu_1 = \mu_0 + f + \frac{f(f + 2h'')}{3\mu_0}, \tag{IV}$$

qu'après avoir obtenu les valeurs corrigées de Q^2, h'' et e, comme il va être dit dans un instant.

La solution ne sera admissible qu'autant que μ_1 sera compatible avec la nature des matériaux employés.

Dans l'un et l'autre cas, à l'aide des valeurs de $\frac{g}{f}$ et de $\frac{Y_0}{f}$, on tirera de la Table II, la valeur correspondante de $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$; et, de

celle-ci jointe à la valeur approchée de e, on déduira la correction $\delta(Q^2)$ de la constante Q^2.

Ayant ajouté cette correction à la valeur approchée de Q^2, on se servira de la valeur corrigée, pour calculer h'' par la formule

$$h'' = Y_0 - \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} Y_0, \qquad (\text{v})$$

et l'on pourra calculer une valeur plus exacte de e en faisant usage des formules précédentes et des valeurs corrigées de h'' et Q^2. On aura d'ailleurs dans le premier cas $h = h'' - e$, $\varepsilon_0 = Y_0 - h$, et dans les deux cas,

$$q^2 = 2e\mu_0 = 2\left[Q^2 + h''e - \frac{2}{3}e^2\right]. \qquad (\text{vi})$$

Arches complètes, dites *en anse de panier*. — Les données sont ici deux des trois quantités f, g et Y_1 prises arbitrairement. (On ne peut pas se donner ces trois quantités simultanément et satisfaire en même temps aux conditions de stabilité qui caractérisent notre théorie.) Ayant calculé le rapport des deux quantités données, la Table III fera connaître le rapport de l'inconnue à l'une des données, d'où l'on déduira l'inconnue elle-même. A la vérité, la solution n'est qu'approchée, théoriquement parlant; mais nous avons montré, n° 40, qu'on peut, en pratique, la regarder comme exacte, les erreurs restant toujours au-dessous de celles que comporte l'exécution. Au reste, nous avons donné, dans ce même numéro, le moyen de corriger la solution, à l'aide des Tables IV et V; mais, nous le répétons, il ne sera jamais nécessaire d'effectuer cette correction.

La solution déduite des tables ne devra être acceptée qu'autant qu'elle pourra satisfaire d'ailleurs à de certaines conditions relatives au débouché, au passage des bateaux, au niveau de la chaussée, etc. Autrement, il faudrait modifier l'une des données.

Pour déterminer l'épaisseur e, il est nécessaire de joindre une nouvelle donnée μ_1 ou h aux précédentes.

1° Soit donné μ_1 d'après les mêmes considérations que dans le cas des arches incomplètes, on pourra calculer e par les formules

$$y''_1 = Y_1, \qquad e = \frac{1}{2}\,\frac{f(2y''_1 - f)}{\mu_1 - y''_1\left[1 + \dfrac{y''_1}{6(\mu_1 - f)}\right]} \qquad \text{(VII)}$$

(on réduirait, sans erreur sensible, le dénominateur de la valeur de $2e$ à $\mu_1 - y''_1$). Mais il sera préférable d'employer les suivantes:

$$\mu_0 = \mu_1 - f - \frac{f(2y''_1 - f)}{3(\mu_1 - f)}, \qquad e = \frac{1}{2}\,\frac{f(2y''_1 - f)}{\mu_0 - y''_1 + f + \frac{1}{3}e}; \qquad \text{(VIII)}$$

la seconde de ces valeurs s'obtiendra en négligeant d'abord $\frac{1}{3}e$ au dénominateur. Les ordonnées h'' du sommet de l'intrados fictif et h du sommet de l'extrados et l'épaisseur à la clef ε_0 se calculeront par les formules

$$h'' = y''_1 - f - \frac{1}{3}\,\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}e^2, \qquad h = h'' - e, \qquad \varepsilon_0 = y''_1 - f - h. \qquad \text{(IX)}$$

En supposant μ_1 notablement plus grand que y''_1, il faudra, pour que la solution soit admissible, que l'ordonnée h ne soit point inférieure à une certaine limite fixée par les conditions particulières à l'établissement de la chaussée.

Si l'on veut plus d'exactitude, on recalculera e par la formule

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{y_1''^2 - h''^2}{\mu_0 - h'' + \frac{1}{3}e}. \qquad \text{(IX \textit{bis})}$$

2° Soit donné h au lieu de μ_1, on aura, en vertu des formules précédentes,

$$\left.\begin{array}{ll} y''_1 = Y_1, & \varepsilon_0 = y''_1 - f - h, \\ h'' = y''_1 - f - \frac{1}{3}\,\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}\varepsilon_0^2, & e = h'' - h, \end{array}\right\} \qquad \text{(X)}$$

et l'on calculera μ_1 par les formules

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{y_1''^2 - h''^2}{2e} + h'' - \frac{1}{3}e, \\ \mu_1 &= \mu_0 + f + \frac{f(2y''_1 - f)}{3\mu_0}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XI)}$$

Il faudra que la valeur de μ_1 ne soit pas incompatible avec la résistance des matériaux; autrement, on devra modifier les données.

Dans les deux cas, connaissant μ_0, on calculera

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= 2e\mu_0; \\ Q^2 &= \frac{1}{2}f(2y''_1 - f) + \frac{1}{3}\frac{y_1''^2}{f(2y''_1 - f)}e^2 = \frac{1}{2}q^2 - h''e + \frac{2}{3}e^2. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XII)}$$

Si, dans le premier cas, on a évité de calculer μ_0, on emploiera la formule

$$q^2 = 2\left[Q^2 + h''e - \frac{2}{3}e^2\right], \qquad \text{(XIII)}$$

qui donnera q^2 en fonction de Q^2 et offrira, d'ailleurs, un moyen de vérification.

POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF, INCLINAISON DU JOINT DES NAISSANCES, VOLUME DES MATÉRIAUX.

Arches incomplètes, dites *en arc de cercle*. — L'angle α_1 du joint des naissances avec la verticale, s'obtiendra à l'aide des formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} y''_1 &= f + h'' - \frac{1}{3}f_{,}\left[1 - \frac{(f + k'')(f + 2k'')}{q^2}\right]\frac{e^2}{q^2}, \\ \sin\frac{1}{2}\alpha'_1 &= \sqrt{\frac{y_1''^2 - h''^2}{4Q^2}}, \qquad \sin(\alpha_1 - \alpha'_1) = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}\sin\alpha'_1. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIV)}$$

A la valeur précédente de y''_1, on joindra celle de l'abscisse x''_1 qui se déduit des équations

$$\left.\begin{array}{l} 2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f+h''), \quad \text{ou} \quad 2\delta_1 = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}(f+h''), \\ x''_1 = g + 2\delta_1 \sin\alpha_1. \end{array}\right\} \text{(XV)}$$

Arches complètes ou *en anse de panier.* — On obtiendra l'angle α_1 par la formule

$$\cot\alpha_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}. \qquad \text{(XVI)}$$

et les coordonnées du point inférieur de l'intrados fictif, par les relations

$$\left.\begin{array}{l} x''_1 = g + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f+h''), \\ y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}h''. \end{array}\right\} \text{(XVII)}$$

Dans les deux espèces d'arches, la poussée T_1 exercée normalement au plan de joint des naissances contre les piles ou culées est

$$T_1 = \varpi\lambda e\mu_1; \qquad \text{(XVIII)}$$

les coordonnées du point d'application de cette résultante sont

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x''_1 + \frac{1}{2}e\sin\alpha_1, \\ y_1 = y''_1 - \frac{1}{2}e\cos\alpha_1; \end{array}\right\} \text{(XIX)}$$

les composantes horizontale et verticale de T_1 sont d'ailleurs $T_1\cos\alpha_1$ et $T_1\sin\alpha_1$.

Les culées sont, en outre, soumises aux actions horizontales produites par le massif qu'elles encaissent; la résultante U de ces

actions dépend des ordonnées des points supérieur et inférieur de l'intrados, qui sont

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= h = h'' - e, \\ y'_1 &= y''_1 - e\cos\alpha_1 = y_1 - \tfrac{1}{2} e\cos\alpha_1; \end{aligned}\right\} \quad \text{(xx)}$$

et l'on a

$$U = \varpi\lambda \, \tfrac{1}{2} (y_1'^2 - y_0'^2) \quad \text{(xxi)}$$

Cette résultante U agit horizontalement dans le plan dont l'ordonnée est

$$u = \frac{\tfrac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3)}{\tfrac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2)} = \frac{2}{3}\,\frac{y_1'^2 + y'_1 y'_0 + y_0'^2}{y'_1 + y'_0}. \quad \text{(xxii)}$$

Enfin le volume V de la demi-arche et de la partie correspondante du massif a pour expression

$$V = \lambda e \mu_1 \sin\alpha_1. \quad \text{(xxiii)}$$

Dans les arches complètes on a sensiblement $\sin\alpha_1 = 1$.

(Voir n° 41 les remarques relatives à la largeur des piles.)

On peut obtenir une vérification relative aux poussées horizontales par l'équation suivante :

$$\varpi\lambda e \mu_0 = T_1 \cos\alpha_1 + U, \quad \text{(xxiii } bis\text{)}$$

qui se déduit de la considération de l'équilibre des forces qui sollicitent l'ensemble de la demi-voûte et du massif, projetées horizontalement, ou des équations du n° 9.

Les intensités, directions et points d'application des forces T_1 et U doivent servir de base à l'établissement des culées; il y aura encore à examiner quelles sont les plus grandes variations que peuvent subir ces quantités sous l'influence des surcharges accidentelles, tassements, etc., pour procéder avec sécurité à l'éta-

blissement des culées. Cependant, si l'on procède à l'égard de celles-ci comme nous l'avons fait à l'égard de la voûte, il pourra bien être suffisant de s'en tenir aux charges moyennes.

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS, ETC.

Les calculs suivants supposent le projet bien arrêté : on n'aura besoin de les effectuer que lorsqu'il s'agira de passer à l'exécution.

x'', y'' et ρ'' étant les coordonnées et le rayon de courbure de l'intrados fictif correspondants à l'angle α d'un plan de joint avec la verticale, et $\Delta x''$, $\Delta y''$, $\Delta \rho''$ les accroissements finis que prennent les coordonnées et le rayon de courbure lorsqu'on fait croître α d'une quantité finie $\Delta\alpha$; on a, pour calculer ces accroissements, les formules

$$\left.\begin{aligned}
\rho'' &= \frac{Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos e}{y''}, \\
\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' &= \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}, \\
\Delta y'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha, \\
\Delta x'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,
\end{aligned}\right\} \quad (\text{XXIV})$$

dans lesquelles l'angle $\Delta\alpha$ en dehors des signes sinus et cosinus doit être exprimé en *rapport d'arc au rayon*. Cela se fait en multipliant le nombre de degrés correspondant par $\frac{\pi}{180°}$ (π désignant le rapport de la circonférence au diamètre) : on évite ce calcul en se servant des tables que l'on trouve pages 214 et suivantes des Tables de Callet. Les trois dernières des formules précédentes

sont seulement approximatives, et d'autant plus exactes que $\Delta\alpha$ est plus petit.

Dans la pratique, on prendra $\Delta\alpha$ égal à 2° ou 3°, et l'on fera varier l'angle α de la même quantité $\Delta\alpha$, du moins pendant une grande partie des calculs. On devra commencer ces calculs en attribuant à α, y'' et x'' les valeurs zéro, h'' et zéro, qui ont lieu au sommet de l'intrados fictif. Chaque fois que l'on aura obtenu une nouvelle valeur de ρ'', il conviendra de l'ajouter à la précédente, et de prendre leur moyenne arithmétique; le résultat devra différer très-peu de la dernière valeur calculée de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, ce qui offrira un moyen de vérification. (Voir n° 42.)

On déterminera ensuite l'épaisseur vraie ε mesurée suivant la normale à l'extrados, par les formules

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'' \text{ ou } 2\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}y'', \qquad \varepsilon = e + 2\delta; \qquad \text{(XXV)}$$

puis les coordonnées X, Y de l'intrados réel et celles x', y' de l'extrados, par les relations

$$\left.\begin{array}{ll} Y = y'' + 2\delta\cos\alpha, & y' = y'' - e\cos\alpha, \\ X = x'' - 2\delta\sin\alpha, & x' = x'' + e\sin\alpha. \end{array}\right\} \text{(XXVI)}$$

Les valeurs de y'' et ρ'' sont vérifiées chaque fois, ainsi qu'il vient d'être dit; mais les autres quantités ne l'étant pas, il conviendra, à leur égard, d'employer le procédé des différences.

Parvenu à une valeur de α qui excède l'angle α_1 déterminé plus haut, on recherchera par voie d'interpolation les valeurs correspondantes de Y et de X : ces valeurs devront très-peu différer de $Y_0 + f$ et de g (Y_0 désignant l'ordonnée du sommet de l'intrados ou $h'' + 2\delta_0$), et offriront ainsi un moyen de vérification générale des calculs.

TRACÉ DU PROFIL DE LA VOÛTE AU MOYEN DU RAYON DE COURBURE DE L'INTRADOS FICTIF.

Indépendamment de la quantité q déterminée précédemment, les constantes nécessaires pour effectuer le tracé sont :

$$\left.\begin{aligned} q' &= q - 2\frac{e}{q}\left(h'' - \frac{2}{3}e\right) = 2\frac{Q^2}{q}, \\ a &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{q}, \\ \operatorname{tang}\widehat{E'_1, E'E''} &= \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = \frac{a}{2q}. \end{aligned}\right\} \text{(XXVII)}$$

On remarquera que cet angle $\widehat{E'_1, E'E''}$, dans le cas des arches complètes, se trouve être égal au complément de l'angle α, du dernier joint avec la verticale, ou à l'inclinaison de ce joint sur l'horizon.

Nous renverrons au n° 43, pour ce qui est relatif à la construction du rayon de courbure ρ'' de l'intrados fictif. Ajoutons cependant une remarque sur la manière de procéder au tracé.

L'arc que l'on se propose de décrire avec un rayon ρ'' étant supposé très-petit, mais non pas infiniment petit, on atténuera l'erreur commise par ce fait, en décrivant le petit arc à l'aide du rayon de courbure correspondant ou à peu près au milieu de cet arc. A cet effet, il faudra s'y prendre à deux fois, du moins vers le sommet de l'intrados; la première fois, on déterminera le rayon de courbure correspondant à l'extrémité connue de l'arc à décrire, et l'on décrira avec ce rayon un arc d'une amplitude donnée en degrés. On prendra alors le milieu de cet arc et l'on construira le rayon de courbure correspondant; on se servira de ce nouveau rayon pour tracer définitivement l'arc d'amplitude donnée : on obtiendra de cette manière une suffisante exactitude. Lorsque l'on aura décrit de la sorte plusieurs petits arcs d'une même amplitude, on pourra prévoir assez approximativement la position du point milieu

de l'arc à décrire, pour éviter de faire le tracé de cet arc à deux reprises différentes.

Nous allons maintenant présenter quelques applications des règles qui viennent d'être exposées.

APPLICATIONS.

ARCHES INCOMPLÈTES, DITES EN ARC DE CERCLE.

PREMIER EXEMPLE.

Pont d'Iéna, à Paris.

46. Les calculs suivants ont été faits en partant de donnees que nous avons lieu de regarder comme un peu incertaines : mais il s'agit seulement ici de montrer par un exemple l'usage de nos tables et de nos formules; pour cette raison, nous nous sommes dispensé de faire des recherches dont le résultat nous eût peut-être obligé à recommencer les calculs.

Les données sont:

Demi-ouverture.............. $g = 12^{m},5$

Flèche...................... $f = 3^{m},0$

Ordonnée du sommet de l'intrados.. $Y_0 = 2^{m},05413$ (*);

à ces quantités, nous joindrons la hauteur μ_1 qui représente la charge dans le plan des naissances, et nous supposerons

$$\mu_1 = 65^{m},042,$$

et le poids ϖ du mètre cube,

$$\varpi = 2440 \text{ kil.}$$

(*) Les décimales qui figurent ici et dans la valeur de μ_1 tiennent à ce que nous avons voulu utiliser des calculs faits en partant de la quantité h comme donnée, laquelle était égale à $0^{m},90$.

Nous suivrons la marche tracée dans le numéro précédent. Il vient d'abord

$$\frac{g}{f} = 4,16667; \quad \frac{Y_0}{f} = 0,68471.$$

A l'aide du premier de ces deux nombres, la Table I donne aisément :

$\frac{Y_0}{f}$	$\frac{Q^2}{f^2}$	1re différ.	2e diff.
0,6	6,8902	+ 0,9381	− 39
0,7	7,8283	+ 0,9312	
0,8	8,7625		

d'où :

pour 0,6..............	6,8902
partie prop............	+ 0,79466
2e diff................	+ 26
$\frac{Q^2}{f^2} =$	7,68512 :

on en déduit

valeur approchée........................ $Q^2 = 69,166.$

ÉQUATION (I).

$2h'' =$	4,108
$\mu_1 - f =$	62,041
$-\frac{f(f+2h''_0)}{3(\mu_1 - f)} =$	− 0,115
$\mu_0 =$	61,926
$h'' =$	2,054
$\mu_0 - h'' =$	59,872

ÉQUATION (II).

	l. $Q^2 = 1,8399$
$\mu_0 - h'' = 59,872$	l. $= 1,7772$
1re approximation..........	l. $e = 0,0627$
	l. $\frac{2}{3} = 9,8239$
$\frac{2}{3}e = 0,770$..........	l. $= 9,8866$
dénom. $= 60,642$..........	l. $= 1,7828$
2e approximation..........	l. $e = 0,0571$

La Table II donne, à l'aide des valeurs de $\frac{g}{f}$ et $\frac{Y_2}{f}$,

$$\frac{\mathfrak{f}(Q^2)}{e^2} = 0,3435 \ldots\ldots \quad l. = 9,5359$$

$$l.\ e^2 = 0,1142$$

d'où $\mathfrak{f}(Q^2) = 0,447 \ldots\ldots \quad l. = 9,6501$

valeur corrigée.................... $Q^2 = 69,613 \ldots\ldots \quad l. = 1,84269$

ÉQUATION (V).

$$l.\ 6 = 0,7781$$
$$l.\ 6Q^2 = 2,6208$$
$$l.\ \frac{e^2}{6Q^2} = 7,4934$$

$Y_2 = 2,05413 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l.\ Y_2 = 0,3126$

$-\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}Y_2 = -0,00640 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l. = 7,8060-$

$h'' = 2,04773 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l.\ h'' = 0,31127$

En se servant de cette valeur et de celle de Q^2, on peut obtenir une valeur plus exacte de l'épaisseur fictive e. A cet effet, on a :

ÉQUATION (II).

$\mu_0 = 61,926$

$\mu_0 - h'' = 59,878$

$\frac{2}{3}e = 0,766$ (*)

$$l.\ Q^2 = 1,84269$$

dénom. $= 60,644$ .... l. dénom. $= 1,78279$

valeur corrigée...... $e = 1,1479 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l.\ e = 0,05990$

$$l.\ e^2 = 0,11980$$

Nous devons faire remarquer que la surcharge $h = h'' - e = 0^m,90$ environ ne pèche pas par excès de petitesse : elle présenterait plutôt l'excès contraire.

(*) Ce nombre provient d'une première approximation obtenue en faisant usage de la valeur 0,770 employée plus haut.

ÉQUATION (VI).

	l. 2 = 0,30103
	l. e = 0,05990
	l. μ_e = 1,79187
q^2 = 142,168	l. q^2 = 2,15280

L'épaisseur à la clef, adoptée dans la construction du pont d'Iéna, est $1^m,25$, nombre qui excède de $0^m,1$ environ l'épaisseur fictive que nous venons de déterminer.

Calcul de la poussée.

ÉQUATIONS (XIV).

$f+h''=$	5,04773...	l. = 0,70310
$f+2h''=$	7,09546...	l. = 0,85098
		c. l. q^2 = 7,84720
$\dfrac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2}=$	0,25193...	l. = 9,40128
$1-$ id. =	0,74807...	l. = 9,87394
		l. $\dfrac{e^2}{q^2}$ = 7,96700
3ᵉ terme =	−0,00693...	l. = 7,84094
(*) $y'_1=$	5,0408..	l. y'_1 = 0,70250

$y_1''^2=$	25,410	l. = 1,40500
$h''^2=$	4,193	l. = 0,62254
$y_1''^2-h''^2=$	21,217	l. = 1,32668
$4Q^2=$	278,452	l. = 2,44475
		diff. = 8,88193
$\frac{1}{2}\alpha'_1=$	16° 1′ 26″	l. sin = 9,44097
$\alpha'_1=$	32 2 52	l. sin = 9,7248
$\alpha_1-\alpha'_1=$	0 5 41	l. sin = 7,2182
$\alpha_1=$	32° 8′ 33″ (**)..	l. sin α_1 = 9,72593
		l. cos α_1 = 9,92774

Dans les calculs suivants, nous déterminerons les poussées par unité de longueur de la voûte, mesurée parallèlement aux génératrices. Pour avoir les poussées totales, il suffira de multiplier ensuite par la longueur λ.

(*) Si, à l'aide des valeurs que l'on vient de déterminer, on calcule x''_1, puis g par les formules du n° 36, on trouvera pour la valeur de g précisément celle qui nous a servi de point de départ. L'accord de nos Tables avec le calcul direct se trouve vérifié dans cet exemple ; il en est de même pour les deux exemples présentés plus loin. Or on pouvait craindre que la substitution des différences finies aux différentielles ne laissât subsister des erreurs un peu sensibles.

(**) En calculant α_1 par l'équation (6), n° 36, on trouve $\alpha_1 = 32°\ 8'\ 37''$; la différence 4″ entre cette valeur et celle que donnent les équations (XIV) est tout à fait négligeable.

ÉQUATIONS (XV).

$$\text{l.}\,(f+h'') = 0{,}7031$$
$$\text{l.}\,\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7{,}4934$$
$$g = 12{,}5 \qquad \text{l.}\,2\delta_1 = 8{,}1965$$
$$2\delta_1 \sin\alpha_1 = 0{,}0084 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\;\text{l.} = 7{,}9224$$
$$x''_1 = 12{,}5084$$

ÉQUATION (XVIII).

$$\text{l.}\,\varpi = 3{,}38739$$
$$\text{l.}\,\mu_1 = 1{,}81319$$
$$\text{l.}\,e = 0{,}05990$$

Poussée normale au plan des naissances.... $\frac{T_1}{\lambda} = 182171$ kil....... l. $= 5{,}26048$

Composante verticale.............. $\frac{T_1}{\lambda}\sin\alpha_1 = 96919$......... l. $= 4{,}98641$

Composante horizontale............ $\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 = 154248$.......... l. $= 5{,}18822$

ÉQUATIONS (XIX) ET (XX).

$$\text{l.}\,\frac{1}{2}e = 9{,}75887$$
$$+\frac{1}{2}e\sin\alpha_1 = +\;0{,}30535 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 9{,}48480$$
$$-\frac{1}{2}e\cos\alpha_1 = -\;0{,}48597 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 9{,}68661$$
$$x_1 = 12{,}8138$$
$$y_1 = 4{,}5548$$
$$y'_0 = 0{,}8998 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 9{,}95415$$
$$y'_1 = 4{,}0688 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 0{,}60947$$

ÉQUATION (XXI).

$$y_1'^2 = 16{,}5550 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 1{,}21893$$
$$y_0'^2 = 0{,}8097 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 9{,}90830$$
$$y_1'^2 - y_0'^2 = 15{,}7453$$
$$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2) = 7{,}8726 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 0{,}89612$$
$$\text{l.}\,\varpi = 3{,}38739$$
$$\frac{U}{\lambda} = 19209 \text{ kil} \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 4{,}28351$$

ÉQUATION (XXII).

$$y_1'^2 = 67{,}3597 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 1{,}82840$$
$$y_0'^2 = 0{,}7285 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 9{,}86245$$
$$y_1'^2 - y_0'^2 = 66{,}6312$$
$$\frac{1}{3}(y_1'^2 - y_0'^2) = 22{,}2104 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 1{,}34655$$
$$u = 2{,}8212 \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 0{,}45043$$

ÉQUATION (XXIII *bis*). *Vérification.*

$$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda} = 173457 \text{ kil} \;\ldots\ldots\;\text{l.} = 5{,}23919$$
$$\text{l.}\,e\mu_0 = 1{,}85177$$
$$\text{l.}\,\varpi e\mu_0 = 5{,}23916$$

erreur = 3

La résultante $\frac{T_1}{\lambda}$ des pressions qui sollicitent les culées normalement au plan des naissances se trouve déterminée, ainsi que les coordonnées x_1 et y_1 de son point d'application; et sa direction est définie par l'angle α_1. La résultante $\frac{U}{\lambda}$ des pressions horizontales qu'exerce le massif sur la face verticale de la culée passant par l'extrémité inférieure de l'extrados, et l'ordonnée u de son point d'application, sont aussi connues par les calculs précédents. Ces données, jointes à la connaissance de la profondeur à laquelle doivent descendre les fondations des culées et de la résistance du sol avoisinant, doivent être complétées par des hypothèses sur l'action des surcharges accidentelles et l'effet des tassements, pour qu'il soit possible de procéder à la détermination de la forme et des dimensions inconnues des culées.

Au lieu du volume V des matériaux, nous allons calculer la surface $\frac{V}{\lambda}$ du profil de la demi-arche et du massif.

ÉQUATION (XXIII).

$$\frac{V}{\lambda} = 39^{m.q},721 \ldots\ldots \quad 1. = 1,59902.$$

Il nous reste à déterminer la forme de la voûte.

Calcul des coordonnées, inclinaisons, rayons de courbure, épaisseurs.

Le tableau ci-joint présente le détail des calculs numériques. Ces calculs sont basés sur les formules (XXIV), (XXV) et (XXVI), dans lesquelles on a fait l'angle constant $\Delta\alpha$ égal à $2°$.

ARCHES INCOMPLÈTES,

DONNÉES DU PONT D'IÉNA, À PARIS. — CALCUL DES COORDONNÉES.

FORMULES.

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha}{y''}.$$

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha.$$

Pour vérification :

$$\rho''_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur}.$$

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} y'',$$

$$\varepsilon = e + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

CONSTANTES.

Soit $\Delta\alpha = 2°$.

$\Delta\alpha = 0{,}0349066$

$l.\ \Delta\alpha = 8{,}54291$

$Q^2 = 69{,}613$

$l.\ e^2 = 0{,}11980$

$l.\ 3 = 0{,}47712$

$l.\ \frac{1}{3} e^2 = 9{,}64268$

$h'' = y''_0 = 2^m{,}04773$

$x''_0 = 0$

$l.\ \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7{,}4934$

α	0°	2°	4°	6°	8°	10°
$l.\ \sin\alpha$	$\overline{\infty}$	8,54282	8,84358	9,01923	9,14356	9,23967
$l.\ \cos\alpha$	0	9,99974	9,99894	9,99761	9,99575	9,99335
$l.\ \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	8,24186	8,71880	8,94030	9,08589	9,19433	9,28060
$l.\ \cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	9,99993	9,99940	9,99834	9,99676	9,99462	9,99195
$l.\ \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	6,78477	7,26171	7,48321	7,62880	7,73724	7,82351
$l.\ \cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,54284	8,54231	8,54115	8,53967	8,53753	8,53486
$l.\ \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha$	9,6427	9,6424	9,6416	9,6403	9,6384	9,6360
y''	2,04773	2,06821	2,12845	2,22518	2,35382	2,50938
x''	0	1,17311	2,32251	3,42811	4,47584	5,45779
$\frac{1}{2} e^2 \cos\alpha$	0,4392	0,4389	0,4382	0,4368	0,4349	0,4325
$Q^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha$	69,174	69,174	69,175	69,176	69,178	69,181
$l.\ [Q^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha]$	1,83994	1,83994	1,83995	1,83996	1,83997	1,83999
$l.\ y''$	0,31127	0,31559	0,32806	0,34737	0,37177	0,39957
$l.\ \rho''$	1,52867	1,52435	1,51189	1,49259	1,46820	1,44042
$l.\ \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,31344	8,78606	8,99510	9,12139	9,20544	9,26393
$\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,02058	0,06110	0,09888	0,13225	0,16049	0,18362
$y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	2,06831	2,12931	2,22733	2,35743	2,51431	2,69300
$\frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,01029	0,03055	0,04944	0,06612	0,08024	0,09181
$y'' + \frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	2,07860	2,15986	2,27677	2,42355	2,59455	2,78481
$l.\ [y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,31562	0,32824	0,34778	0,37244	0,40042	0,43024
$l.\ [y'' + \frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,31777	0,33443	0,35732	0,38445	0,41406	0,44480
$l.\ [\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'']$	1,52652	1,51816	1,50235	1,48058	1,45456	1,42586
$l.\ \Delta y''$	8,31129	8,77987	8,98556	9,10988	9,19180	9,24937
$l.\ \Delta x''$	0,06936	0,06047	0,04360	0,02025	9,99209	9,96072
$\Delta y''$	0,02048	0,06024	0,09673	0,12864	0,15556	0,17757
$\Delta x''$	1,17311	1,14940	1,10560	1,04773	0,98195	0,91352
ρ''	33,7808	33,4464	32,5005	31,0878	29,3900	27,5689
Vérification: $\rho''_m + \rho''_{m+1}$	67,227	65,947	63,588	60,478	56,959	53,317
Vérification: $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1})$	33,614	32,973	31,794	30,239	28,480	26,659
Vérification: $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$	33,614	32,973	31,794	30,240	28,481	26,660
Vérification: erreur	0	0	0	1	1	1.
$l.\ e\sin\alpha$	$\overline{\infty}$	8,60872	8,90348	9,07913	9,20346	9,29957
$l.\ e\cos\alpha$	0,05990	0,05964	0,05884	0,05751	0,05565	0,05325
$e\sin\alpha$	0	0,04006	0,08007	0,11999	0,15976	0,19933
$e\cos\alpha$	1,14790	1,14720	1,14509	1,14160	1,13671	1,13044
y'	0,8998	0,9210	0,9834	1,0836	1,2171	1,3789
x'	0	1,2132	2,4026	3,5482	4,6356	5,6571
$l.\ 2\delta$	7,8047	7,8090	7,8215	7,8408	7,8652	7,8930
$l.\ 2\delta\sin\alpha$	$\overline{\infty}$	6,3518	6,6651	6,8600	7,0088	7,1327
$l.\ 2\delta\cos\alpha$	7,8047	7,8087	7,8204	7,8384	7,8609	7,8863
2δ	0,00638	0,00644	0,00663	0,00692	0,00733	0,00782
$2\delta\sin\alpha$	0	0,00022	0,00046	0,00072	0,00102	0,00136
$2\delta\cos\alpha$	0,00638	0,00644	0,00661	0,00689	0,00726	0,00770
ε	1,1543	1,1543	1,1545	1,1548	1,1552	1,1557
Y	2,0541	2,0747	2,1351	2,2321	2,3611	2,5171
X	0	1,1729	2,3220	3,4274	4,4748	5,4564

DITES *EN ARC DE CERCLE.*

INCLINAISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°	32°	34°
9,31788	9,36366	9,44034	9,46996	9,53405	9,57358	9,60931	9,64184	9,67161	9,69897	9,72421	9,74756
9,99040	9,98690	9,98284	9,97821	9,97299	9,96717	9,96073	9,95366	9,94593	9,93753	9,92842	9,91857
9,35209	9,41300	9,46594	9,51264	9,55433	9,59168	9,62595	9,65705	9,68557	9,71184	9,73611	9,75859
9,98872	9,98495	9,98060	9,97567	9,97015	9,96403	9,95726	9,94966	9,94162	9,93307	9,92359	9,91336
7,89500	7,95591	8,00685	8,05555	8,09724	8,13479	8,16686	8,19996	8,22646	6,25475	8,27902	6,30150
8,53163	8,52785	8,52351	6,51858	8,51306	8,50694	8,50019	6,49279	6,46473	6,47596	8,46650	8,45627
9,6331	9,6296	9,6255	9,6209	9,6157	9,6098	9,6034	9,5963	9,5886	9,5602	9,5711	9,5612
2,68695	2,88230	3,09184	3,31264	3,54235	3,77908	4,02134	4,26792	4,51763	4,77028	5,02461	5,28026
6,37131	7,21747	7,99948	8,72168	9,36881	10,00552	10,57625	11,10505	11,59553	12,05097	12,47425	12,86792
0,4296	0,4262	0,4222	0,4177	0,4126	0,4072	0,4012	0,3947	0,3878	0,3804	0,3725	0,3641
69,184	69,187	69,191	69,195	69,200	69,206	69,212	69,218	69,225	69,233	69,241	69,249
1,84001	1,84003	1,84005	1,64008	1,84011	1,84014	1,84016	1,84022	1,84026	1,64031	1,84036	1,64041
0,42926	0,45974	0,49022	0,52017	0,54929	0,57739	0,60437	0,63022	0,65493	0,67654	0,70110	0,72266
1,41075	1,38029	1,34983	1,31991	1,29082	1,26275	1,23581	1,21000	1,16533	1,16177	1,13926	1,11775
9,30575	9,33620	9,35866	9,37546	9,38806	9,39754	9,40467	9,40996	9,41361	9,41652	9,41828	9,41925
0,20219	0,21667	0,22639	0,23739	0,24436	0,24977	0,25390	0,25702	0,25930	0,26093	0,26199	0,26257
2,66914	3,09917	3,32023	3,55003	3,78673	4,02885	4,27524	4,52494	4,77713	5,03121	5,28660	5,54283
0,10109	0,10843	0,11419	0,11869	0,12219	0,12466	0,12695	0,12851	0,12965	0,13046	0,13099	0,13129
2,99023	3,20760	3,43442	3,66872	3,90892	4,15373	4,40219	4,65345	4,90678	5,16167	5,41759	5,67412
0,46077	0,49125	0,52117	0,55023	0,57826	0,60516	0,63096	0,65561	0,67917	0,70167	0,72318	0,74373
0,47570	0,50618	0,53585	0,56451	0,59206	0,61644	0,64367	0,66778	0,69080	0,71279	0,73381	0,75390
1,39582	1,36536	1,33515	1,30563	1,27702	1,24949	1,22310	1,19783	1,17370	1,15065	1,12863	1,10758
9,29062	9,32127	9,34400	9,36118	9,37426	9,38426	9,39196	9,39779	9,40218	9,40540	9,40765	9,40906
9,92745	9,89321	9,85866	9,62421	9,79008	9,75643	9,72329	9,69062	9,65643	9,62663	9,59513	9,56365
0,19535	0,20954	0,22080	0,22971	0,23673	0,24226	0,24658	0,24991	0,25245	0,25433	0,25565	0,25650
0,84616	0,76201	0,72220	0,66713	0,61671	0,57073	0,52880	0,49048	0,45544	0,42326	0,39367	0,36631
25,7484	24,0044	22,3785	20,6886	19,5353	18,3126	17,2112	16,2161	15,3225	14,5134	13,7803	13,1145
49,753	46,383	43,267	40,424	37,858	35,524	33,429	31,541	29,836	28,294	26,695	»
24,877	23,192	21,634	20,212	18,924	17,762	16,715	15,770	24,916	14,147	13,447	»
24,878	23,193	21,635	20,213	18,924	17,762	16,715	15,770	14,916	14,147	13,447	»
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	»
9,37778	9,44358	9,50024	9,54988	9,59395	9,63348	9,66921	9,70174	9,73151	9,75867	9,76411	9,80746
0,05030	0,04680	0,04274	0,03811	0,03289	0,02707	0,02063	0,01356	0,00583	9,99743	9,98832	9,97847
0,23866	0,27770	0,31640	0,35472	0,39260	0,43001	0,46689	0,50320	0,53890	0,57394	0,60829	0,64169
1,12277	1,11378	1,10342	1,09172	1,07867	2,06431	1,04865	1,03172	1,01352	0,99410	0,97346	0,95164
1,5642	1,7685	1,9884	2,2209	2,4637	2,7146	2,9727	3,2362	3,5043	3,7762	4,0511	4,3286
6,6100	7,4952	6,3159	9,0764	9,7814	10,4355	11,0431	11,6082	12,1344	12,6249	13,0825	13,5098
7,9227	7,9531	7,9836	8,0136	6,0427	6,0708	8,0976	6,1236	8,1483	8,1719	8,1945	8,2161
7,2406	7,3368	7,4239	7,5036	7,5767	7,6444	7,7071	7,7654	7,8199	7,6708	7,9187	7,9637
7,9131	7,9400	7,9664	7,9918	6,0157	6,0360	6,0565	8,0773	8,0942	8,1094	6,1229	6,1347
0,00837	0,00898	0,00963	0,01032	0,01103	0,01177	0,01253	0,01329	0,01407	0,01486	0,01565	0,01645
0,00174	0,00217	0,00265	0,00319	0,00377	0,00441	0,00510	0,00583	0,00660	0,00743	0,00829	0,00920
0,00819	0,00871	0,00926	0,00961	0,01037	0,01091	0,01144	0,01195	0,01242	0,01286	0,01327	0,01364
1,1563	2,1568	1,1575	1,1582	1,1589	2,1597	1,1604	1,1612	1,1620	1,1628	1,1635	1,1643
2,6951	2,6910	3,1011	3,3224	3,5527	3,7900	4,0326	4,2799	4,5302	4,7631	5,0379	5,2939
6,3696	7,2153	7,9968	8,7185	9,3850	10,0011	10,5712	11,0992	11,5889	12,0435	12,4660	12,8567

Chaque colonne verticale est calculée isolément jusqu'à ρ''. Ajoutant $\Delta y''$ et $\Delta x''$ aux valeurs de y'' et x'' qui se trouvent dans la même colonne, on obtient les y'' et x'' de la colonne suivante, et l'on continue les calculs jusqu'à ρ'' inclusivement. Revenant alors à la colonne précédente, on y effectue la vérification indiquée, et l'on poursuit ainsi les déterminations successives jusqu'à la dernière colonne verticale. La marche des erreurs, par sa régularité, indique suffisamment l'exactitude de toutes les valeurs obtenues, sauf celle de x''. L'abscisse x'', de même que les coordonnées x', y', X, Y et les épaisseurs ε, ne peuvent être vérifiées qu'à l'aide de leurs différences successives.

Le calcul qui vient d'être présenté constitue une véritable intégration par quadratures : il convient d'en comparer le résultat à celui que fournissent nos Tables ou que donne l'intégration effectuée au moyen des fonctions elliptiques.

Nous avons trouvé $y''_1 = 5^m,0408$, $x''_1 = 12^m,5084$, et $\alpha_1 = 32°\,8'\,33''$; il s'agit de tirer du tableau, par interpolation, les valeurs de x'' et de α correspondantes à la valeur $y'' = 5^m,0408$. Soit n la fraction de l'intervalle de 2° à laquelle répond y''_1; il viendra pour déterminer n, en prenant les différences 1re et 2e de y'' à partir de $\alpha = 32°$,

$$0,0162 = n \,.\, 0,25565 + \frac{n(n-1)}{2} 0,00085,$$

d'où, en négligeant le dernier terme,

$$n = 0,0633:$$

cette valeur étant substituée dans le deuxième terme ne donne rien de sensible. On en déduit

$$x'' = 12,47425 + n \,.\, 0,39367 - \frac{n(n-1)}{2} 0,02736$$

partie proportionnelle....	+ 0,02492
2e différence...........	+ 0,00079

$$x'' = 12,5000$$

En comparant cette valeur à x''_1, on voit que les erreurs accumulées de notre calcul ne s'élèvent qu'à $0^m,0084$.

Quant à l'angle α, on a immédiatement $\alpha = 32^\circ + n.2^\circ = 32^\circ 7' 36''$, ce qui donne une erreur de $57''$, quantité que l'on peut parfaitement négliger dans une question de ce genre. On ferait disparaître l'erreur qui affecte x''_1, soit en diminuant la demi-ouverture de $0^m,008$ dans la construction, soit en appliquant les nombres du tableau jusqu'à $x'' = 12^m,5084$; mais alors on produirait dans y''_1 une erreur de $0^m,005$ environ; c'est-à-dire qu'il faudrait élever la chaussée ou abaisser les naissances d'autant.

Le calcul des coordonnées y'' et x'' ayant été poussé jusqu'aux centièmes de millimètre, l'inexactitude des dernières décimales n'a pas dû s'élever par accumulation jusqu'au chiffre des millimètres. On peut regarder les écarts entre le calcul par quadratures et le calcul par les Tables, comme provenant de ce que l'intervalle $\Delta\alpha$ n'est point extrêmement petit, plutôt que des termes du troisième ordre négligés dans les formules générales.

Dans la pratique, on n'aura jamais besoin d'effectuer les calculs qui précèdent avec autant de figures que nous en avons employé, le nombre des déterminations successives de e pourra être réduit, et les calculs du tableau précédent pourront quelquefois être remplacés par la construction graphique. Si nous n'avons pas abrégé les calculs, c'est que nous tenions à comparer les résultats des deux méthodes d'intégration.

Les ingénieurs que n'effrayeront point les longs calculs présentés en dernier lieu, feront bien de les exécuter ou d'en surveiller l'exécution, qui ne peut exiger plus de un à deux jours de travail, suivant l'habileté du calculateur. Lorsqu'on songe à l'importance des constructions, aux accidents graves qui peuvent naître du défaut de bonnes proportions, ou de ce que l'ingénieur ne s'est pas bien rendu compte du jeu des forces en faisant son projet, on a de la peine à concevoir que l'on ne consacre pas aux calculs qui font la base fondamentale du projet, le quart ou la dixième partie des soins que l'on consacrera à l'enjolivement des dessins.

Calcul des constantes nécessaires à l'exécution du tracé.

ÉQUATIONS (XXVII).

$\text{l. } Q^2 = 1{,}84269$	$\text{l. } \frac{2}{3} = 9{,}82391$
$\text{l. } 2 = 0{,}30103$	$\text{l. } e^2 = 0{,}11980$
$\text{l. } 2Q^2 = 2{,}14372$	$\text{l. } \frac{2}{3}e^2 = 9{,}94371$
$q = 11^m{,}9234 \ldots\ldots\ldots \text{l. } q = 1{,}07640$	$\alpha = 0^m{,}07367 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{l. } = 8{,}86731$
$q' = 11\ {,}6767 \ldots\ldots\ldots \text{l. } q' = 1{,}06732$	$\text{l. } 2q = 1{,}37743$
$\frac{1}{2}q = 5\ {,}9617$	$\widehat{E'_1E'E''} = 0^\circ\ 10'\ 37'' \ldots \text{l. tang} = 7{,}48988$

Au moyen de ces quantités, on pourrait effectuer le tracé en suivant les indications données n°s 43 et 45. L'épure du profil de la voûte étant faite, soit en suivant ce procédé, soit à l'aide des coordonnées calculées au tableau précédent; si l'on trace sur la même épure l'arc de cercle tangent au sommet et passant par les naissances, on trouve que le plus grand écart entre l'intrados circulaire et celui de notre épure est de $0^m{,}14$ à peu près; cet écart se manifeste à une distance de la verticale qui passe par le sommet, égale à 0,7 environ de la demi-ouverture. Nous avons dit, en terminant la première partie du mémoire, que l'écart, assez faible en apparence, des deux intrados ne serait pas une raison pour substituer l'arc de cercle à celui que nous proposons.

La planche I présente le profil d'une demi-arche, et la planche II l'élévation d'un pont projeté sur les données du pont d'Iéna.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Arche à grande portée, de 5 mètres de flèche et près de 45 mètres d'ouverture.

47. Soient données : $f = 5^m$; $g = 22^m{,}4957$; $Y_0 = 2^m{,}514$; $\mu_1 = 100^m{,}071$; $\varpi = 2440$ kil. La charge maximum μ_1 répond à peu près à la limite 100^m de Navier, et au dixième de la résistance absolue de la roche d'Arcueil, eu égard à la différence des densités. (Les chiffres décimaux qui figurent dans ces données

provienment, comme dans l'exemple précédent, de ce que nous avons voulu utiliser des calculs faits avec d'autres données.)

En suivant la marche indiquée n° 45, nous trouverons d'abord

$$h'' = 2{,}514, \qquad \frac{g}{f} = 4{,}49914, \qquad \frac{Y_0}{f} = 0{,}5028.$$

La Table I donne, relativement à la valeur de $\frac{g}{f}$:

$\frac{Y_0}{f}$	$\frac{Q^2}{f^2}$	1re différ.	2e diff.
0,5	6,8732	+ 1,0922	− 68
0,6	7,9654	+ 1,0854	
0,7	9,0508		

d'où :

pour 0,5		6,8732
partie proportionnelle	+	306
2e différence	+	1
$\frac{Q^2}{f^2} =$		6,9039

valeur approchée..... $Q^2 = 172{,}598.$

ÉQUATION (I).

$\mu_1 - f = 95{,}071$.

$3(\mu_1 - f) = 285{,}213$ ... l. = 2,4552

$2h'' = 5{,}028$

$f + 2h'' = 10{,}028$

$f(f + 2h'') = 50{,}140$ ... l. = 1,7002

$\frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)} = 0{,}1758$ ... l. = 9,2450

$\mu_0 = 94{,}8952$ ... l. = 1,97724

ÉQUATION (II).

l. $Q^2 = 2{,}23704$

$\mu_0 - h'' = 92{,}381$ .... l. = 1,96558

val. app.... l. $c = 0{,}27146$

l. $\frac{2}{3} = 9{,}82391$

$\frac{2}{3}c = 1{,}246$ .... l. = 0,09537

dénom. = 93,627 .... l. = 1,97140

l. $c = 0{,}26564$

Pour corriger la valeur de Q^2, nous aurons recours à la Table II qui donne, avec les valeurs précédentes de $\frac{g}{f}$ et $\frac{Y_0}{f}$,

$$\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = 0{,}3394 \ldots\ldots\ldots \text{l.} = 9{,}53071$$

$$\text{l. } e^2 = 0{,}53128$$

d'où $\delta(Q^2) = 1{,}153 \ldots\ldots\ldots \text{l.} = 0{,}06199$

valeur corrigée .... $Q^2 = 173{,}751 \ldots\ldots\ldots \text{l. } Q^2 = 2{,}23993$

ÉQUATION (V).

$$\text{l. } 6 = 0{,}77815$$

$$\text{l. } 6Q^2 = 3{,}01808$$

$$\text{l. } \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7{,}51320$$

$$Y_0 = 2{,}5140 \ldots\ldots \text{l. } Y_0 = 0{,}4004$$

$$-\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}Y_0 = -0{,}0082 \ldots\ldots\ldots \text{l.} = 7{,}9136 -$$

valeur corrigée. .... $h'' = 2{,}5058 \ldots\ldots \text{l. } h'' = 0{,}39895$

A l'aide de cette valeur, nous allons calculer une autre valeur de e plus exacte.

ÉQUATION (II).

$$\mu_0 - h'' = 92{,}3894$$

(à posteriori)..... $\frac{2}{3}e = 1{,}2372$ $\qquad$ $\text{l. } Q^2 = 2{,}23993$

dénom. .... $= 93{,}6266 \ldots\ldots\ldots \text{l.} = 1{,}97140$

valeur corrigée...... $e = 1{,}8558 \ldots\ldots\ldots \text{l. } e = 0{,}26853$

ÉQUATION (VI).

$$\text{l. } 2 = 0{,}30103$$

$$\text{l. } \mu_0 = 1{,}97724$$

$$q^2 = 352{,}209 \ldots\ldots \text{l. } q^2 = 2{,}54680$$

$$\text{l. } e^2 = 0{,}53706$$

La comparaison de h'' et e donne $h = 0^m,65$. Or la hauteur de la charge h peut être réduite à peu près comme il suit :

MATÉRIAUX EMPLOYÉS.	ÉPAISSEUR.	DENSITÉ.	HAUTEUR RÉDUITE à la densité 2,44 des voussoirs.
	m		m
1° Béton............	0,15	1,97	0,121
2° Cailloux et gravier..	0,20	1,9	0,273
3° Sable............	0,15	1,9	
4° Pavé.............	0,25	2,5	0,256
Épaisseur totale........	0,75	Épaisseur réduite, $h = 0,65$	

La solution est donc réalisable. Dans ce cas, les ordonnées sont rapportées à un plan horizontal situé à $0^m,10$ au-dessous du niveau du pavé.

Calcul des poussées, etc.

ÉQUATIONS (XIV).

CALCUL DE y''_1.

$f + h'' = 7,5058 \ldots\ldots$ l. $= 0,87540$

$f + 2h'' = 10,012 \ldots$ l. $= 1,00052$

somme $= 1,87592$

l. $q^2 = 2,54680$

$\frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2} = 0,21336 \ldots$ l. $= 9,32912$

$1 -$ id. $= 0,78664 \ldots$ l. $= 9,89578$

l. $\frac{1}{3} f = 0,22185$

l. $\frac{e^2}{q^2} = 7,99026$

3° terme $= 0,01282 \ldots$ l. $= 8,10789$

$y''_1 = 7,49298 \ldots$ l. $= 0,87465$

CALCUL DE α_1.

$y_1''^2 = 56,144 \ldots\ldots\ldots\ldots$ l. $= 1,74930$

$h''^2 = 6,279 \ldots\ldots\ldots\ldots$ l. $= 0,79789$

$y_1''^2 - h''^2 = 49,865 \ldots\ldots\ldots\ldots$ l. $= 1,69780$

$4Q^2 = 695,004 \ldots\ldots\ldots\ldots$ l. $= 2,84199$

diff. $= 8,85581$

$\frac{1}{2} \alpha'_1 = 15° 32' 13'' \ldots\ldots$ l. sin $= 9,42791$

$\alpha'_1 = 31 \quad 4 \quad 26 \ldots\ldots$ l. sin $= 9,7128$

l. $\frac{1}{6} \frac{e^2}{Q^2} = 7,5132$

$\alpha_1 - \alpha'_1 = 0 \quad 5 \quad 47 \ldots\ldots$ l. sin $= 7,2260$

$\alpha_1 = 31° 10' 13'' \ldots\ldots$ l. sin $\alpha_1 = 9,71398$

l. cos $\alpha_1 = 9,93229$

ÉQUATIONS (XV).

$$\text{l. } 3 = 0,47712$$
$$\text{l. } \frac{1}{3}\frac{e^2}{g^2} = 7,51314$$
$$\text{l. } 2\delta_1 = 8,38854$$

$$2\delta_1 \sin\alpha_1 = 0,01266 \ldots \quad \text{l.} = 8,10252$$
$$g = 22,4957$$
$$x''_1 = 22,50836$$

ÉQUATIONS (XIX).

$$\text{l. } \frac{1}{2} e = 9,96750$$

$$\frac{1}{2} e \sin\alpha_1 = 0,48026 \ldots \quad \text{l.} = 9,68148$$
$$\frac{1}{2} e \cos\alpha_1 = 0,79394 \ldots \quad \text{l.} = 9,89979$$

$$x_1 = 22,9886$$
$$y_1 = 6,6990$$

ÉQUATIONS (XX).

$$y'_2 = 0,65 \ldots \quad \text{l.} = 9,81291$$
$$y'_1 = 5,9051 \ldots \quad \text{l.} = 0,77123$$

ÉQUATION (XVIII).

$$\text{l. } \mu_1 = 2,00031$$
$$\text{l. } e\,\mu_1 = 2,26884$$
$$\text{l. } \varpi = 3,38739$$

$$\frac{T_1}{\lambda} = 453138 \text{ kil} \ldots \quad \text{l. } \frac{T_1}{\lambda} = 5,65623$$
$$\frac{T_1}{\lambda} \sin\alpha_1 = 234536 \ldots \quad \text{l.} = 5,37021$$
$$\frac{T_1}{\lambda} \cos\alpha_1 = 387721 \ldots \quad \text{l.} = 5,58852$$

ÉQUATION (XXI).

$$y_1'^2 = 34,8698 \ldots \quad \text{l.} = 1,54245$$
$$y_2'^2 = 0,4225 \ldots \quad \text{l.} = 9,62582$$
$$y_1'^2 - y_2'^2 = 34,4473$$
$$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_2'^2) = 17,2236 \ldots \quad \text{l.} = 1,23612$$
$$\text{l. } \varpi = 3,38739$$
$$\frac{U}{\lambda} = 42025 \text{ kil} \ldots \quad \text{l.} = 4,62351$$

ÉQUATION (XXII).

$$y_1'^3 = 205,911 \ldots \quad \text{l.} = 2,31368$$
$$y_2'^3 = 0,275 \ldots \quad \text{l.} = 9,43873$$
$$y_1'^3 - y_2'^3 = 205,636$$
$$\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_2'^3) = 68,545 \ldots \quad \text{l.} = 1,83598$$
$$u = 3,9798 \ldots \quad \text{l.} = 0,59986$$

ÉQUATION (XXIII).

$$\frac{V}{\lambda} = 96^{m.c.},127 \ldots \quad \text{l.} = 1,98282$$

ÉQUATION (XXIII *bis*). *Vérification.*

$$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda} = 429746 \text{ kil} \ldots \quad \text{l.} = 5,63321$$
$$\text{l. } e\,\mu_0 = 2,24577$$
$$\text{l. } \varpi\, e\,\mu_0 = 5,63316$$
$$\text{erreur} = 5$$

Nous renverrons, pour ce qui concerne l'usage des quantités que nous venons d'obtenir, à ce qui a déjà été dit dans l'exemple du numéro précédent, à l'égard de quantités analogues.

Calcul des coordonnées, inclinaisons des joints, rayons de courbure, épaisseurs.

Le tableau ci-après offre les détails des calculs effectués en suivant la marche qui a été indiquée dans l'exemple relatif au pont d'Iéna : nous nous bornerons à comparer les valeurs de x'', et α, déduites du tableau par interpolation, à celles qui ont été déduites des Tables. Désignant toujours par n la fraction de l'intervalle de 2° à laquelle répond $y'' = 7^m{,}49298$, nous avons pour déterminer n,

$$0{,}23917 = n \,.\, 0{,}41655 + \frac{n(n-1)}{2} \,.\, 0{,}00066,$$

d'où l'on tire, en négligeant le dernier terme,

$$n = 0{,}57417,$$

et, en ayant égard à ce dernier terme,

$$n = 0{,}57435.$$

Avec cette valeur et les différences de x'' relatives à $\alpha = 30^\circ$, il vient

$$x'' = 22{,}08359 + n \,.\, 0{,}69327 - \frac{n(n-1)}{2} \,.\, 0{,}05083 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3} \,.\, 0{,}00434$$

	1er terme.	22,08359
	partie proportionnelle. . . . . . +	0,39818
	2e différence. . . . . +	620
	3e différence. . . . . +	25
d'où	$x'' =$	22,48822
or nous avons trouvé	$x''_1 =$	22,50836
l'erreur est donc		0,0201

quantité moindre que la millième partie de la demi-ouverture.

ARCHES INCOMPLÈTES,

PROJET D'ARCHE À GRANDE PORTÉE, DE $44^m,991$ D'OUVERTURE ET $5^m,000$ DE FLÈCHE. —

FORMULES.

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{3}e^2 \cos\alpha}{y''},$$

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha.$$

Pour Vérification.

$$\rho''_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur}.$$

$$y = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'',$$

$$\varepsilon = e + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\sin\alpha$$

CONSTANTES.

Soit $\Delta\alpha = 2°$.

$\Delta\alpha = 0,0349066$

$l.\ \Delta\alpha = 8,54291$

$Q^2 = 173,751$

$l.\ e^2 = 0,53706$

$l.\ 3 = 0,47712$

$l.\ \frac{1}{3}e^2 = 0,05994$

$h' = y''_0 = 2^m,50580$

$x''_0 = 0$

$l.\ \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7,51314$

α	0°	2°	4°	6°	8°	10°
$l.\ \sin\alpha$	$\overline{\infty}$	8,54282	8,84358	9,01923	9,14356	9,23967
$l.\ \cos\alpha$	0	9,99974	9,99894	9,99761	9,99575	9,99335
$l.\ \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	8,24186	8,71880	8,94030	9,08589	9,19433	9,28060
$l.\ \cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	9,99993	9,99940	9,99834	9,99676	9,99462	9,99195
$l.\ \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	6,78477	7,26171	7,48321	7,62880	7,73724	7,82351
$l.\ \cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,54284	8,54231	8,54125	8,53967	8,53753	8,53486
$l.\ \frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	0,0599	0,0597	0,0589	0,0576	0,0557	0,0533
y''	2,50580	2,54742	2,66840	2,85866	3,10536	3,39596
x''	0	2,38440	4,69285	6,86745	8,87668	10,71144
$\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	1,148	1,147	1,145	1,142	1,137	1,131
$Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	172,603	172,604	172,606	172,609	172,614	172,620
$l.\ [Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha]$	2,23705	2,23705	2,23705	2,23706	2,23708	2,23709
$l.\ y''$	0,39895	0,40610	0,42625	0,45616	0,49211	0,53096
$l.\ \rho''$	1,83810	1,83095	1,81080	1,78090	1,74497	1,70613
$l.\ \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,62287	9,09266	9,29401	9,40970	9,48221	9,52964
$\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,04196	0,12378	0,19679	0,25686	0,30354	0,33856
$y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	2,54776	2,67120	2,86519	3,11552	3,40890	3,73452
$\frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,02098	0,06189	0,09840	0,12843	0,15177	0,16928
$y'' + \frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	2,56874	2,73309	2,96359	3,24395	3,56067	3,90380
$l.\ [y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,40616	0,42671	0,45715	0,49353	0,53261	0,57224
$l.\ [y'' + \frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,40972	0,43665	0,47182	0,51107	0,55153	0,59149
$l.\ [\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'']$	1,83454	1,82101	1,79613	1,76336	1,72605	1,68688
$l.\ \Delta y''$	8,61931	9,08272	9,27934	9,39216	9,46329	9,51039
$l.\ \Delta x''$	0,37738	0,36332	0,33738	0,30303	0,26358	0,22174
$\Delta y''$	0,04162	0,12098	0,19026	0,24670	0,29060	0,32388
$\Delta x''$	2,38440	2,30845	2,17460	2,00923	1,83476	1,66625
ρ''	68,881	67,756	64,684	60,381	55,587	50,831
Vérification: $\rho''_m + \rho''_{m+1}$	136,637	132,440	125,065	115,968	106,418	97,239
Vérification: $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1})$	68,318	66,220	62,532	57,984	53,209	48,619
Vérification: $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$	68,319	66,223	62,536	57,991	53,217	48,627
Vérification: erreur	1	3	4	7	8	8
$l.\ e\sin\alpha$	$\overline{\infty}$	8,81135	9,11211	9,28776	9,41209	9,50820
$l.\ e\cos\alpha$	0,26853	0,26827	0,26747	0,26614	0,26428	0,26185
$e\sin\alpha$	0	0,06477	0,12945	0,19398	0,25828	0,32226
$e\cos\alpha$	1,85580	1,85469	1,85127	1,84560	1,83772	1,82760
y'	0,6500	0,6927	0,8171	1,0131	1,2676	1,5684
x'	0	2,4492	4,8223	7,0614	9,1350	11,0337
$l.\ 2\delta$	7,9122	7,9198	7,9394	7,9893	8,0052	8,0441
$l.\ 2\delta\sin\alpha$	$\overline{\infty}$	6,4620	6,7830	6,9885	7,1488	7,2838
$l.\ 2\delta\cos\alpha$	7,9121	7,9189	7,9383	7,9669	8,0009	8,0374
2δ	0,00817	0,00830	0,00870	0,00932	0,01012	0,01107
$2\delta\sin\alpha$	0	0,00029	0,00061	0,00097	0,00141	0,0019[illegible]
$2\delta\cos\alpha$	0,00817	0,00830	0,00868	0,00927	0,01002	0,0109[illegible]
ε	1,8640	1,8641	1,8645	1,8651	1,8659	1,8669
Y	2,5140	2,5557	2,6771	2,8679	3,1154	3,4069
X	0	2,3841	4,6922	6,8665	8,8753	10,7095

DITES *EN ARC DE CERCLE.*

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°	32°	34°
9,31788	9,38368	9,44034	9,48998	9,53405	9,57358	9,60931	9,64184	9,67161	9,69897	9,72421	9,74756
9,99040	9,98690	9,98284	9,97821	9,97299	9,96717	9,96073	9,95366	9,94593	9,93753	9,92842	9,91857
9,35209	9,41300	9,46594	9,51264	9,55433	9,59188	9,62595	9,65705	9,68557	9,71184	9,73611	9,75859
9,98872	9,98494	9,98060	9,97567	9,97015	9,96403	9,95728	9,94988	9,94182	9,93307	9,92359	9,91336
7,89500	7,95591	8,00885	8,05555	8,09724	8,13479	8,16886	8,19996	8,22848	8,25475	8,27902	8,30150
8,53163	8,52785	8,52351	8,51858	8,51306	8,50694	8,50019	8,49279	8,48473	8,47598	8,46650	8,45617
0,0503	0,0468	0,0428	0,0381	0,0329	0,0271	0,0207	0,0136	0,0059	9,9975	9,9884	9,9785
3,71984	4,06868	4,43621	4,81772	5,20973	5,60960	6,01535	6,42540	6,83855	7,25381	7,67036	8,08757
12,37769	13,88867	15,26027	16,50814	17,64663	18,68832	19,64422	20,52359	21,33444	22,08359	22,77686	23,41930
1,123	1,114	1,104	1,092	1,079	1,064	1,049	1,032	1,014	0,994	0,974	0,952
172,628	172,637	172,647	172,659	172,672	172,687	172,702	172,719	172,737	172,757	172,777	172,799
2,23711	2,23713	2,23716	2,23719	2,23722	2,23726	2,23730	2,23734	2,23738	2,23743	2,23748	2,23754
0,57052	0,60945	0,64701	0,68284	0,71682	0,74893	0,77926	0,80790	0,83496	0,86057	0,88482	0,90782
1,66659	1,62768	1,59015	1,55435	1,52040	1,48833	1,45804	1,42944	1,40242	1,37686	1,35266	1,32972
9,56159	9,58359	9,59900	9,60990	9,61764	9,62312	9,62690	9,62940	9,63090	9,63161	9,63168	9,63122
0,36441	0,38335	0,39719	0,40729	0,41461	0,41988	0,42355	0,42599	0,42746	0,42817	0,42823	0,42778
4,08425	4,45203	4,83340	5,22501	5,62434	6,02948	6,43890	6,85139	7,26601	7,68198	8,09859	8,51535
0,18221	0,19167	0,19860	0,20364	0,20730	0,20994	0,21177	0,21299	0,21373	0,21408	0,21412	0,21389
4,26646	4,64370	5,03200	5,42865	5,83164	6,23942	6,65067	7,06438	7,47974	7,89606	8,31271	8,72924
0,61111	0,64856	0,68425	0,71800	0,75007	0,78028	0,80881	0,83578	0,86130	0,88547	0,90841	0,93020
0,63007	0,66686	0,70174	0,73469	0,76579	0,79514	0,82286	0,84907	0,87388	0,89741	0,91974	0,94098
1,64763	1,60938	1,57266	1,53775	1,50468	1,47347	1,44398	1,41615	1,38984	1,36492	1,34133	1,31894
9,54263	9,56529	9,58151	9,59330	9,60192	9,60826	9,61284	9,61611	9,61832	9,61967	9,62035	9,62044
0,17926	0,13723	0,09617	0,05633	0,01774	9,98041	9,94417	9,90894	9,87457	9,84090	9,80783	9,77521
0,34884	0,36753	0,38151	0,39201	0,39987	0,40575	0,41005	0,41315	0,41526	0,41655	0,41721	0,41722
1,51098	1,37160	1,24787	1,13849	1,04169	0,95590	0,87938	0,81085	0,74915	0,69327	0,64244	0,59595
46,408	42,431	38,918	35,839	33,144	30,784	28,710	26,881	25,259	23,816	22,525	21,366
88,839	81,349	74,757	68,983	63,928	59,494	55,591	52,140	49,075	46,341	43,891	»
44,419	40,674	37,378	34,492	31,964	29,747	27,795	26,070	24,538	23,170	21,945	»
44,425	40,680	37,382	34,495	31,966	29,749	27,796	26,071	24,538	23,170	21,945	»
6	6	4	3	2	2	1	1	0	0	0	»
9,58641	9,65221	9,70887	9,75851	9,80258	9,84211	9,87784	9,91037	9,94014	9,96750	9,99274	0,01609
0,25893	0,25543	0,25137	0,24674	0,24152	0,23570	0,22926	0,22219	0,21446	0,20606	0,19695	0,18710
0,38584	0,44896	0,51153	0,57346	0,63471	0,69520	0,75482	0,81352	0,87124	0,92790	0,98342	1,03775
1,81522	1,80067	1,78390	1,76498	1,74390	1,72068	1,69535	1,66798	1,63855	1,60716	1,57380	1,53850
1,9046	2,2680	2,6523	3,0527	3,4658	3,8889	4,3200	4,7574	5,2000	5,6466	6,0966	6,5491
12,7635	14,3376	15,7718	17,0816	18,2813	19,3835	20,3990	21,3371	22,2057	23,0115	23,7603	24,4572
8,0837	8,1226	8,1601	8,1960	8,2300	8,2621	8,2924	8,3210	8,3481	8,3737	8,3980	8,4210
7,4016	7,5063	7,6004	7,6860	7,7640	7,8357	7,9017	7,9628	8,0197	8,0727	8,1222	8,1686
8,0741	8,1095	8,1429	8,1742	8,2030	8,2293	8,2531	8,2747	8,2940	8,3112	8,3264	8,3396
0,01213	0,01326	0,01446	0,01571	0,01698	0,01829	0,01961	0,02094	0,02229	0,02364	0,02500	0,02636
0,00252	0,00321	0,00399	0,00485	0,00581	0,00685	0,00797	0,00918	0,01046	0,01182	0,01325	0,01471
0,01186	0,01287	0,01390	0,01493	0,01596	0,01695	0,01791	0,01882	0,01968	0,02047	0,02120	0,02186
1,8679	1,8691	1,8703	1,8715	1,8728	1,8741	1,8754	1,8767	1,8781	1,8794	1,8808	1,8822
3,7317	4,0815	4,4501	4,8326	5,2257	5,6266	6,0332	6,4442	6,8582	7,2743	7,6916	8,1094
12,3752	13,8855	15,2563	16,5033	17,6408	18,6815	19,6363	20,5144	21,3240	22,0718	22,7637	23,4046

Quant à la valeur de α, elle est $30° + n \cdot 2° = 31°\ 8'\ 55''$ au lieu de $31°\ 10'\ 13''$, d'où il résulte que l'erreur sur α_1 est de $1'\ 18''$, quantité négligeable au degré d'approximation que nous nous sommes imposé.

Les erreurs sur x''_1 et α_1 auraient été évidemment réduites en prenant $\Delta\alpha$ égal à $1°$. Si l'on veut réaliser l'ouverture proposée, il suffira de faire croître y''_1 de la quantité $0^m,0201 \tang \alpha_1 = 0^m,0122$, et il en résultera la nécessité d'élever la chaussée ou d'abaisser les naissances de 1 centimètre environ.

Calcul des constantes nécessaires à l'exécution du tracé.

ÉQUATIONS (XXVII).

$$\text{l. } Q^2 = 2,23993$$
$$\text{l. } 2 = 0,30103$$
$$\text{l. } 2Q^2 = 2,54096$$
$$q = 18^m,7672 \ldots\ldots\ldots \text{ l. } q = 1,27340$$
$$q' = 18\ ,5166 \ldots\ldots\ldots \text{ l. } q' = 1,26756$$
$$\frac{1}{2}q = 9\ ,3836$$

$$\text{l. } \frac{2}{3} = 9,82391$$
$$\text{l. } e^2 = 0,53706$$
$$\text{l. } \frac{2}{3}e^2 = 0,36097$$
$$a = 0^m,12234 \ldots\ldots \text{ l. } a = 9,08757$$
$$\text{l. } 2q = 1,57443$$
$$\widehat{E_1'E'E''} = 0°\,11'\,12'' \ldots \text{ l. tang} = 7,51314$$

Le tracé de l'intrados comparé à l'arc de cercle tangent au sommet et passant par les naissances donne, entre ces courbes, un écart qui s'élève jusqu'à $0^m,30$ environ, et qui se présente vers les 0,7 de la distance de l'axe de la voûte aux naissances. C'est à cette comparaison des deux intrados que s'applique la discussion du n° 32.

On peut voir, planches I et II, le profil de l'arche que nous venons d'étudier et une élévation de pont construite sur ce profil. On a figuré, planche II, un mode de disposition de l'appareil des têtes qui semblerait se prêter à la réalisation approximative des actions normales de la charge sur l'extrados de la voûte. Le sens vertical ou horizontal du lit de carrière serait indifférent, dans cette disposition, si l'on pouvait négliger l'effet des surcharges

accidentelles, puisque les pressions horizontales et verticales en un point donné du massif seraient égales, conformément aux conséquences de l'hypothèse de la fluidité. Nous n'osons pas insister pour que l'on réalise la disposition indiquée dans la figure ; nous avons voulu seulement donner une idée de l'aspect que présenterait un semblable mode d'appareiller les parements extérieurs.

ARCHES COMPLÈTES OU *EN ANSE DE PANIER.*

Exemple d'un projet d'arche à grande portée, de 60ᵐ,070 d'ouverture.

48.° Il nous a semblé bon de présenter un exemple des grandes dimensions que nos formules permettent de donner aux arches de pont, sans sortir des conditions de grande stabilité, ni exposer les voussoirs à des pressions trop considérables.

L'arche en pierre de la plus grande dimension que l'on connaisse est celle du pont de Vieille-Brioude (sur l'Allier). Cette arche a 54ᵐ,20 d'ouverture et 21 mètres de flèche ; le projet dont nous nous occupons présente encore plus de hardiesse, comme on va le voir.

Soient données en premier lieu :

Demi-ouverture........... $g = 30^m,035$... l. $g = 1,47763$

Ordonnée des naissances.... $Y_1 = 18,7480$.. l. $Y_1 = 1,27295$

d'où $\frac{g}{Y_1} = 1,60207$... l. $= 0,20468$

Si l'on cherche ce nombre dans la Table III, colonne marquée $\frac{g}{Y_1}$, on trouvera, par interpolation, qu'il répond à

$\frac{f}{Y_1} = 0,865903$ ... l. $= 9,93747$

d'où $f = 16,2338$ ..... l. $= 1,21042$

puis, à cause de $y''_1 = Y_1$,

$y''_1 - f = 2,5142$ ..... l. $= 0,40040$

On voit ainsi que la somme de l'épaisseur à la clef et de la surcharge ne s'élève qu'à $2^m,5142$: il convient donc d'employer des matériaux résistants, pour ne pas avoir une surcharge trop faible. Supposons que les matériaux dont on dispose soient capables de résister à la charge permanente représentée par

$$\mu_1 = 112^m,326 \ldots \quad \text{l.}\ \mu_1 = 2,05048$$

et soit

$$\varpi = 2440 \text{ kil.} \ldots \quad \text{l.}\ \varpi = 3,38739 ;$$

μ_1 ne sera qu'environ le $\frac{1}{16}$ de la hauteur 1803 mètres qui répond à la rupture du liais de Bagneux (voir le tableau du n° 74). Si l'on s'en tient aux prescriptions rapportées par M. Poncelet, on ne courra aucun risque en adoptant le chiffre ci-dessus. L'emploi de la charge μ_1 que nous proposons aurait contre lui le dire de Navier, qui limite les charges à 100 mètres dans les arches de pont; mais nous devons penser que cet ingénieur n'a pas prétendu les fixer ainsi à $\frac{1}{10}$ près : il avait en vue les constructions telles que tout le monde les pratiquait à son époque; constructions dans lesquelles la stabilité s'éloigne plus ou moins de la grande stabilité que nous avons assignée aux nôtres.

Calculons μ_0 et e :

ÉQUATIONS (VIII).

$$2y'_1 - f = 21,2622 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,32761$$
$$\text{l.}\ f(2y'_1 - f) = 2,53803$$
$$\mu_1 - f = 96,092$$
$$3(\mu_1 - f) = \boxed{288,276} \ldots\ldots \quad \text{l.} = 2,45981$$
$$\frac{f(2y'_1 - f)}{3(\mu_1 - f)} = 1,197 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 0,07822$$
$$\mu_0 = 94,895 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,97724$$
$$\mu_0 - y'_1 + f = 92,381 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,96558$$

$$\text{l.}\ \frac{1}{2} f(2y'_1 - f) = 2,23700$$
$$\text{l.}\ (\mu_0 - y'_1 + f) = 1,96558$$
$$\text{val. appr.} \ldots \quad \text{l.}\ e = 0,27142$$
$$\text{l.}\ 3 = 0,47712$$
$$\frac{1}{3} e = 0,6227 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 9,79430$$
$$\text{dénominat.} = 93,0037 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,96850$$
$$2^e \text{ val. appr.} \ldots \quad \text{l.}\ e = 0,26850$$
$$\frac{1}{3} e = 0,6185 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 9,79138$$

ÉQUATIONS (IX).

$$y_1'' - f = 2{,}5142 \ldots\ldots\ \text{l.} = 0{,}40040$$

$$\text{l.}\,\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)} = 7{,}86237$$

$$\text{l.}\,\frac{1}{3}\,e^2 = 0{,}05988$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}\,e^2 = 0{,}0084 \ldots\ldots\ \text{l.} = 7{,}92225$$

$$h'' = 2{,}5058 \ldots\ \text{l.}\,h'' = 0{,}39895$$

$$e = 1{,}8558 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h = 0{,}6500$$

Calcul plus précis de e, ÉQUATION (IX *bis*).

$$y_1''^2 = 351{,}488 \ldots\ldots\ \text{l.} = 2{,}54591$$

$$h''^2 = 6{,}279 \ldots\ldots\ \text{l.} = 0{,}79789$$

$$y_1''^2 - h''^2 = 345{,}209$$

$$\frac{1}{2}(y_1''^2 - h''^2) = 172{,}604 \ldots\ldots\ \text{l.} = 2{,}23705$$

$$\mu_0 - h'' = 92{,}389$$

$$\text{dénomin.} \ldots = 93{,}008 \ldots\ldots\ \text{l.} = 1{,}96852$$

$$\text{val. corr.} \ldots\ e = 1{,}8558\,(^*) \ldots\ \text{l.}\,e = 0{,}26853$$

ÉQUATIONS (XII).

$$\frac{1}{2}\,q^2 = 176{,}105 \ldots\ \text{l.}\,e\mu_0 = 2{,}24577$$

$$\text{l.}\,2 = 0{,}30103$$

$$q^2 = \boxed{352{,}209} \ldots\ \text{l.}\,q^2 = 2{,}54680$$

$$-h''e = -4{,}650 \ldots\ldots\ \text{l.} = 0{,}66748\ -$$

$$\text{l.}\,e^2 = 0{,}53706$$

$$\text{l.}\,\frac{2}{3} = 9{,}82391$$

$$+\frac{2}{3}\,e^2 = +2{,}296 \ldots\ldots\ \text{l.} = 0{,}36097$$

$$Q^2 = 173{,}751 \ldots\ \text{l.}\,Q^2 = 2{,}23993$$

On peut remarquer actuellement que les constantes Q^2, e, μ_0, q^2 et h'' sont précisément les mêmes que dans l'exemple précédent. Nous avons choisi nos données de manière à retrouver ces constantes : en cela nous nous sommes proposé d'utiliser les calculs relatifs aux coordonnées, rayons de courbure, etc., présentés dans cet exemple.

(*) Si l'on voulait se servir de cette valeur de e pour corriger la solution, à l'aide de la Table IV, on trouverait $\frac{Y_1\,\delta f}{e^2} < 0{,}0001$, d'où $\delta f < 0^m{,}00002$.

Sans cette circonstance, nous aurions pu nous dispenser d'effectuer le dernier calcul de e, car le logarithme de cette quantité, obtenu en dernier lieu, ne diffère de celui obtenu précédemment que de trois unités du dernier ordre.

En se reportant à la valeur de e, on voit comment le bon emploi des matériaux conduit, malgré des dimensions si considérables, à une épaisseur à la clef qui n'a rien d'exagéré, et que probablement tout ingénieur, en l'absence d'une théorie aussi approchée que la nôtre, eût augmentée notablement. C'est du moins ce que l'on peut induire de l'examen des constructions existantes, où l'on trouve des épaisseurs de voûte de 2 mètres à $2^{m},25$ pour des portées incomparablement moindres que 60 mètres.

Si, au lieu de se donner μ_1, on se fût donné h, on aurait calculé e et μ_1 par les équations (x) et (xi) : la valeur trouvée aurait fait admettre ou rejeter la solution.

Calcul des poussées, etc.

ÉQUATION (XVI).

$$\text{l.}\,\frac{e^2}{q^2} = 7{,}99026$$
$$\text{l.}\,3 = 0{,}47712$$
$$\alpha_1 = 89^\circ\,48'\,48'' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{l. cot}\,\alpha_1 = 7{,}51314$$
$$\text{l. sin}\,\alpha_1 = 0$$
$$\text{l. cos}\,\alpha_1 = 7{,}51314$$

1re ÉQUATION (XVII).

$$\text{l.}\,\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}51314$$
$$f + k'' = 18{,}7396 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1{,}27276$$
$$\frac{1}{3}(f + k'')\frac{e^2}{q^2} = 0{,}06108 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 8{,}78590$$
$$g = 30{,}035$$
$$x''_1 = 30{,}09608$$

ÉQUATION (XVIII).

$$\text{l.}\,e\,\mu_1 = 2{,}31901$$
$$\frac{T_1}{\lambda} = \frac{T_1}{\lambda}\sin\alpha_1 = 508628.\text{ kil.} \ldots\ldots \quad \text{l.} = 5{,}70640$$
$$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 = 1658 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 3{,}21954$$

ÉQUATIONS (XIX).

$$\frac{1}{2}e\sin\alpha_1 = 0{,}92790 \ldots \quad \text{l.}\,\frac{1}{2}e = 9{,}96750$$
$$\frac{1}{2}e\cos\alpha_1 = 0{,}00302 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 7{,}48064$$
$$x_1 = 31{,}02398$$
$$y_1 = 18{,}74498$$

ÉQUATIONS (XX) ET (XXI).

$$y'_1 = 18,74196 \ldots \quad \text{l. } y'_1 = 1,27281$$
$$y'_0 = 0,65 \ldots\ldots \quad \text{l. } y'_0 = 9,81291$$
$$y_1'^2 = 351,253 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 2,54562$$
$$y_0'^2 = 0,422 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 9,62582$$
$$y_1'^2 - y_0'^2 = 350,831$$
$$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2) = 175,415 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 2,24407$$
$$\text{l. } \varpi = 3,38739$$
$$\frac{U}{\lambda} = 428016 \text{ kil.} \ldots\ldots \quad \text{l.} = 5,63146$$

ÉQUATION (XXII).

$$y_1'^3 = 6583,09 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 3,81843$$
$$y_0'^3 = 0,27 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 9,43873$$
$$y_1'^3 - y_0'^3 = 6582,82$$
$$\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3) = 2194,27 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 3,34129$$
$$\text{l. dénom.} = 2,24407$$
$$a = 12,5089 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,09722$$

ÉQUATION (XXIII).

$$\frac{V}{\lambda} = 208^{\text{m.c}},454 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 2,31901$$

ÉQUATION (XXIII *bis*), *vérification*.

$$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda} = 429675 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 5,63314$$
$$\text{l. } \varpi e \mu_0 = 5,63316$$
$$\text{erreur} = 2$$

Nous reviendrons tout à l'heure sur l'emploi des quantités U et T_1 dans le calcul des culées.

Calcul des coordonnées, inclinaisons des plans de joint, rayons de courbure, épaisseurs.

De ce que les constantes Q^2, e, q^2 et h'' sont les mêmes que dans l'exemple du n° 47, il résulte que le tableau annexé à ce numéro fournira toutes les quantités demandées, pour des angles α compris entre 0° et 34°; il reste donc à poursuivre le calcul jusque vers 90°.

Nous donnons la suite de ces calculs dans le tableau ci-joint, où nous avons fait $\Delta\alpha = 3°$, de 32° à 62°; et $\Delta\alpha = 4°$, de 62° à 90°, afin d'abréger les calculs. Dans ce tableau, les constantes, sauf $\Delta\alpha$, sont les mêmes que dans le précédent; et les valeurs de x'' et y'', qui nous ont servi de point de départ, sont celles du précédent tableau qui se rapportent à $\alpha = 32°$.

ARCHES COMPLÈTES,

PROJET D'ARCHE À GRANDE PORTÉE, DE $60^m,070$ D'OUVERTURE ET DE $16^m,2338$ DE FLÈCHE. —

FORMULES.

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha}{y''},$$

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha.$$

Pour vérification.

$$\rho''_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur}.$$

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} y'',$$

$$s = \alpha + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

CONSTANTES.

$\Delta\alpha = 3°$.	$\Delta\alpha = 4°$.
$\Delta\alpha = 0,0523599$	$\Delta\alpha = 0,0698132$
$l. \Delta\alpha = 8,71900$	$l. \Delta\alpha = 8,84394$

$Q^2 = 173,751$

$l. \frac{1}{2} e^2 = 0,05994$

$\alpha = 32° \begin{cases} y'' = 7,67036 \\ x'' = 22,77686 \end{cases}$

$l. \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7,51314$

α	32°	35°	38°	41°	44°	47°
$l. \sin\alpha$	9,72421	9,75859	9,78934	9,81694	9,84177	9,86413
$l. \cos\alpha$	9,92842	9,91336	9,89653	9,87778	9,85693	9,83378
$l. \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	9,74189	9,77439	9,80351	9,82968	9,85324	9,87446
$l. \cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	9,92111	9,90518	9,88741	9,86763	9,84566	9,82126
$l. \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,46089	8,49339	8,52251	8,54868	8,57224	8,59346
$l. \cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,64011	8,62418	8,60641	8,58663	8,56466	8,54026
$l. \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha$	9,98836	9,97330	9,95647	9,93772	9,91687	9,89372
y''	7,67036	8,29680	8,92282	9,54694	10,16801	10,78500
x''	22,77686	23,72332	24,56932	25,32647	26,00425	26,61057
$\frac{1}{2} e^2 \cos\alpha$	0,974	0,940	0,905	0,866	0,826	0,783
$Q^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha$	172,777	172,8[illegible]1	172,846	172,885	172,925	172,968
$l. [Q^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha]$	2,23748	2,23757	2,23766	2,23776	2,23786	2,23797
$l. y''$	0,88482	0,91891	0,95050	0,97986	1,00724	1,03282
$l. \rho''$	1,35266	1,31866	1,28716	1,25790	1,23062	1,20515
$l. \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	9,81355	9,81205	9,80967	9,80658	9,80286	9,79861
$\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,65095	0,64871	0,64516	0,64059	0,63513	0,62894
$y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,32131	8,94551	9,56798	10,18753	10,80314	11,41394
$\frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,32547	0,32435	0,32258	0,32029	0,31756	0,31447
$y'' + \frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,64678	9,26986	9,89056	10,50782	11,12070	11,72841
$l. [y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,92019	0,95161	0,98082	1,00807	1,03355	1,05744
$l. [y'' + \frac{1}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,93686	0,96707	0,99522	1,02151	1,04613	1,06924
$l. [\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'']$	1,33599	1,30320	1,27276	1,24446	1,21804	1,19335
$l. \Delta y''$	9,79688	9,79659	9,795[illegible]	9,79314	9,79028	9,7868[illegible]
$l. \Delta x''$	9,97610	9,92738	9,87917	9,83109	9,78270	9,7336
$\Delta y''$	0,62644	0,62602	0,62412	0,62107	0,61699	0,61201
$\Delta x''$	0,94646	0,84602	0,75713	0,67778	0,60632	0,5415[illegible]
ρ''	22,525	20,829	19,371	18,109	17,007	16,038
Vérification: $\rho''_m + \rho''_{m+1}$	43,354	40,200	37,480	35,116	33,045	31,219
Vérification: $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1})$	21,677	20,100	18,740	17,558	16,522	15,609
Vérification: $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$	21,677	20,100	18,740	17,558	16,521	15,608
Vérification: erreur	0	0	0	0	—1	—1
$l. e\sin\alpha$	9,99274	0,02712	0,05787	0,08547	0,11030	0,13266
$l. e\cos\alpha$	0,19695	0,18189	0,16506	0,14631	0,12546	0,10[illegible]
$e\sin\alpha$	0,98342	1,06444	1,14254	1,21750	1,28914	1,[illegible]372
$e\cos\alpha$	1,57380	1,52016	1,46238	1,40059	1,33494	1,26504
y'	6,0964	6,7766	7,4804	8,1463	8,8331	9,5194
x'	23,7603	24,7878	25,7119	26,5440	27,2934	27,9678
$l. 2\delta$	8,3980	8,4321	8,4636	8,4930	8,5204	8,5460
$l. 2\delta\sin\alpha$	8,1222	8,1907	8,2529	8,3099	8,3622	8,4101
$l. 2\delta\cos\alpha$	8,3264	8,3455	8,3601	8,3708	8,3773	8,3798
2δ	0,02500	0,02705	0,02908	0,03112	0,03314	0,03516
$2\delta\sin\alpha$	0,01325	0,01551	0,01790	0,02041	0,02303	0,02571
$2\delta\cos\alpha$	0,02120	0,02216	0,02291	0,02349	0,02384	0,02398
e	1,8808	1,8829	1,8849	1,8869	1,8889	1,8910
Y	7,6916	8,3190	8,9457	9,5704	10,1918	10,8090
X	22,7636	23,7082	24,5514	25,3060	25,9812	26,5849

OU *EN ANSE DE PANIER.*

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

50°	53°	56°	59°	62°	66°	70°	74°	78°	82°	86°	90°
9,88425	9,90235	9,91857	9,93307	9,94593	9,96073	9,97299	9,98284	9,99040	9,99575	9,99894	0
9,80807	9,77946	9,74756	9,71184	9,67161	9,60931	9,53405	9,44034	9,31788	9,14356	8,84358	$\overline{\infty}$
9,89354	9,91069	9,92603	9,93970	9,95366	9,96711	9,97821	9,98690	9,99335	9,99761	9,99974	9,99974
9,79415	9,76395	9,73021	9,69234	9,64184	9,[illegible]7358	9,48998	9,38368	9,23967	9,01923	8,54282	8,5428-
8,61254	8,62969	8,64503	8,65870	8,79760	8,81111	8,82215	8,83084	8,83729	8,84155	8,84368	8,84368
8,51315	8,48295	8,44921	8,41134	8,48578	8,41752	8,33392	8,22762	8,08361	7,86317	7,38676	7,3868-
9,86801	9,83940	9,80750	9,77178	9,73155	9,66925	9,59399	9,50028	9,37782	9,20350	8,90352	$\overline{\infty}$
11,39708	12,00344	12,60341	13,19634	13,78164	14,54951	15,30153	16,03655	16,75349	17,45134	18,12909	18,78581
27,15208	27,63441	28,06236	28,44009	28,77124	29,14576	29,14960	29,68842	29,86718	29,99023	30,06147	30,08440
0,738	0,691	0,642	0,591	0,539	0,468	0,393	0,316	0,239	0,160	0,080	0
173,013	173,060	173,109	173,160	173,212	173,283	173,358	173,435	173,512	173,591	173,671	173,751
2,23808	2,23820	2,23832	2,23845	2,23858	2,23876	2,23894	2,23914	2,23933	2,23953	2,23973	2,23993
1,05679	1,07931	1,10049	1,12046	1,13930	1,16285	1,18474	1,20511	1,22410	1,24183	1,25838	1,27383
1,18129	1,15889	1,13783	1,11799	1,09928	1,07591	1,05420	1,03403	1,01523	0,99770	0,98135	0,96610
9,79383	9,78858	9,78286	9,77669	9,89688	9,88702	9,87636	9,86487	9,85252	9,83925	9,82503	9,80978
0,62206	0,61458	0,60654	0,59799	0,78864	0,77094	0,75225	0,73261	0,71205	0,69064	0,66839	0,64533
12,01914	12,61802	13,20995	13,79433	14,57028	15,32045	16,05378	16,76916	17,46556	18,14198	18,79748	19,43114
0,31103	0,30729	0,30327	0,29899	0,39432	0,38547	0,37612	0,36630	0,35603	0,34532	0,33419	0,32266
12,33017	12,92531	13,51322	14,09332	14,96460	15,70592	16,42990	17,13546	17,82159	18,48730	19,13167	19,75380
1,07987	1,10099	1,12090	1,13970	1,16347	1,18527	1,20558	1,22451	1,24218	1,25869	1,27410	1,28850
1,09097	1,11144	1,13076	1,14901	1,17506	1,19606	1,21563	1,23390	1,25094	1,26687	1,28175	1,29565
1,17019	1,14844	1,12797	1,10868	1,08769	1,06512	1,04415	1,02464	1,00647	0,98952	0,97370	0,95895
9,78273	9,77813	9,77300	9,76738	9,88529	9 87623	9,86630	9,85548	9,84376	9,83107	9,81738	9,80253
9,68334	9,63139	9,57718	9,52002	9,57347	9,48264	9,37807	9,25226	9,09008	8,85272	8,36046	8,3457-
0,60636	0,59997	0,59292	0,58530	0,76787	0,75202	0,73502	0,71694	0,69785	0,67775	0,65672	0,63464
0,48233	0,42795	0,37773	0,33115	0,37452	0,30384	0,23882	0,17876	0,12305	0,07124	0,02293	-0,02217
15,181	14,417	13,735	13,122	12,5684	11,9100	11,3292	10,8151	10,3569	9,9481	9,5797	9,2491
29,598	28,152	26,857	25,690	24,4784	23,2392	22,1443	21,1720	20,3050	19,5278	18,8288	»
14,799	14,076	13,428	12,845	12,2392	11,6196	11,0721	10,5860	10,1525	9,7639	9,4144	»
14,798	14,075	13,427	12,843	12,2374	11,6177	11,0701	10,5840	10,1501	9,7617	9,4124	»
—1	—1	—1	—2	—18	—19	—20	—20	—24	—22	—20	»
0,15278	0,17088	0,18710	0,20160	0,21446	0,22926	0,24152	0,25137	0,25893	0,26428	0,26747	0,26853
0,07660	0,04799	0,01609	9,98037	9,94014	9,87784	9,80258	9,70887	9,58641	9,41209	9,11211	$\overline{\infty}$
1,42161	1,48211	1,53851	1,59074	1,63855	1,69535	1,74389	1,78390	1,81522	1,83772	1,85127	1,85580
1,19289	1,11684	1,03774	0,95581	0,87125	0,75182	0,63472	0,51153	0,38584	0,25828	0,12945	0
10,2041	10,8866	11,5657	12,2405	12,9160	13,8000	14,6718	15,5298	16,3722	17,1974	18,0038	18,7858
18,5737	29,1165	29,6009	30,0308	30,4098	30,8411	31,1935	31,4723	31,6824	31,8280	31,9127	31,9402
8,5699	8,5924	8,6136	8,6336	8,6524	8,6760	8,6979	8,7183	8,7372	8,7550	8,7715	8,7870
8,4541	8,4948	8,5322	8,5667	8,5983	8,6367	8,6709	8,7011	8,7276	8,7508	8,7704	8,7871
8,3780	8,3719	8,3612	8,3454	8,3240	8,2853	8,2320	8,1587	8,0551	7,8986	7,6151	$\overline{\infty}$
0,03715	0,03912	0,04108	0,04301	0,04492	0,04743	0,04988	0,05228	0,05460	0,05689	0,05909	0,06124
0,02845	0,03110	0,03406	0,03687	0,03966	0,04332	0,04687	0,05025	0,05341	0,05634	0,05894	0,06124
0,02388	0,02355	0,02297	0,02215	0,02109	0,01929	0,01706	0,01441	0,01135	0,00792	0,00412	0
1,8930	1,8949	1,8969	1,8988	1,9007	1,9032	1,9057	1,9081	1,9104	1,9127	1,9149	1,9170
11,4210	12,0270	12,6264	13,2185	13,8027	14,5688	15,3186	16,0510	16,7648	17,4593	18,1332	18,7858
27,1236	27,6033	28,0283	28,4032	28,7316	29,1024	29,4027	29,6382	29,8138	29,9339	30,0025	30,0232

La marche des erreurs affecte une grande régularité : d'un autre côté, les valeurs des coordonnées autres que y'', et celles des épaisseurs, ayant été vérifiées par les différences successives, il n'est pas admissible qu'il se soit glissé quelque faute de calcul assez notable pour qu'on doive s'y arrêter.

Pour comparer le résultat fourni par notre tableau à celui que donnent les Tables, il convient ici de rechercher à quelle valeur de α répond le maximum de l'abscisse X de l'intrados réel, et la valeur correspondante de Y; nous comparerons ensuite α à l'angle α_1 calculé plus haut, et le maximum de X à la demi-ouverture g, puis Y à Y_1. Soit n la fraction de l'intervalle $\Delta\alpha = 4^\circ$ comptée à partir de 90° vers 0°, à laquelle répond le maximum de X; nous aurons, pour expression générale de X, dans le voisinage de 90°, à l'aide des différences de X prises dans le même sens que n,

$$X = 30{,}0232 - n.0{,}0207 - \frac{n(n-1)}{2}.0{,}0479 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}.0{,}0036,$$

d'où l'on tire, en posant $\frac{dX}{dn} = 0$,

$$0 = -0{,}0207 - \frac{2n-1}{2}.0{,}0479 - \frac{3n^2-6n+2}{6}.0{,}0036.$$

Cette équation donne, en réduisant et tirant la valeur de n d'une certaine manière,

$$n = +\frac{0{,}041}{0{,}886 + 0{,}036\,n^2},$$

d'où

$$n = +0{,}04619.$$

La valeur correspondante de α est $90^\circ - n.4^\circ$, ou $89^\circ\,48'\,55''$: cet angle étant comparé à la valeur de α_1 calculée directement, donne une différence de $7''$ qui est tout à fait insensible; et même, pour pouvoir répondre de l'exactitude de cette différence, il faudrait avoir déterminé les différences de X avec une figure de plus.

L'expression générale de Y, en partant de $\alpha = 90°$, s'obtient de la même manière que celle de X; elle est

$$Y = 18,7858 - n.\,0,6526 - \frac{n(n-1)}{2}\,0,0213.$$

En substituant la valeur de n dans les expressions de X et Y, il vient

$$X = 30,0232, \qquad Y = 18,7561;$$

or nous avions

$$g = 30,035.. \qquad Y_1 = 18,7480;$$

les erreurs sont donc

$$-\ 0^m,0118, \ldots\ldots + 0^m,0081.$$

On pourra généralement négliger de telles erreurs dans la pratique. Pour les réduire, il eût fallu prendre des valeurs de $\Delta\alpha$ plus petites que celles employées.

La valeur de l'épaisseur ε qui figure dans la dernière colonne du tableau fera connaître la largeur minimum des piles : en effet, cette largeur doit être au moins égale au double de la projection horizontale du joint extrême, ou à 2ε dans le cas actuel, et dans l'hypothèse où les matériaux qui forment les assises des piles présentent autant de résistance que les voussoirs. La largeur des piles serait donc au minimum de $3^m,834$.

CALCUL DES CONSTANTES NÉCESSAIRES À L'EXÉCUTION DU TRACÉ.

Ces constantes étant évidemment les mêmes que dans l'exemple précédent, nous renverrons à cet exemple, en rappelant que, si l'angle $\widehat{E'_1 E' E''}$ n'était pas déjà déterminé, on le ferait, sans calcul, égal au complément de α_1.

On trouvera, planches I et II, le profil de l'arche qui vient d'être calculée et l'élévation d'un pont à plusieurs arches construite sur ce profil.

En comparant le tracé de l'intrados à celui d'une demi-ellipse ayant pour demi-axes la flèche et la demi-ouverture de l'arche qui nous occupe, on verra que l'écart de ces courbes s'élève jusqu'à $0^m,40$, et qu'il a lieu vers les 0,7 de la distance des naissances à la verticale qui passe par le sommet. Si l'on voulait substituer l'ellipse à notre intrados, en donnant pour épaisseur à la voûte celle que nous avons trouvée pour les naissances, et qui est $1^m,92$, on trouverait, en raisonnant comme au n° 32, que la résultante des pressions pourrait passer à une distance de l'extrados elliptique égale à $0^m,59$, quantité qui n'est que les $\frac{4}{13}$ environ de l'épaisseur. Or, les pressions ne s'exerçant que sur une étendue triple de celle-ci ou égale à $1^m,77$, il s'ensuit que les joints s'ouvriraient à l'intrados d'une profondeur de $0^m,15$ autour du point où les deux courbes présentent le plus grand écart. La pression moyenne y serait représentée par la valeur de μ relative au joint considéré, multipliée par $\frac{1,8558}{1,77} = 1,05$, et la pression vers l'extrados, par cette même valeur multipliée par 2,1. Cette dernière serait donc plus que double de la pression qui aurait lieu dans notre système.

L'exemple que nous venons de présenter montre que, sauf les difficultés d'exécution, on peut construire des arches de très-grande portée dans les conditions d'une très-grande stabilité, sans donner aux voûtes des épaisseurs exagérées. Nous ne croyons pas avoir fixé la limite du possible : dans cet exemple et le précédent, les charges maximum que supportent les voussoirs n'excèdent pas $112^m,33$; tandis qu'en employant le liais de Bagneux par exemple, on pourrait charger les voussoirs jusqu'à 180 mètres, sans excéder le $\frac{1}{10}$ de la charge de rupture.

La nécessité de donner un large débouché aux arches des ponts qui traversent nos grands fleuves a reçu une nouvelle confirmation dans ces derniers temps. On s'accorde à admettre qu'une partie des désastres survenus aux environs d'Orléans en 1846 est due

au manque de débouché du pont de Vierzon et à la présence du remblai par lequel on aborde ce pont du côté du sud.

On conçoit, en effet, que des arches à grande portée, assises sur des piles fortes et peu nombreuses, présentent un débouché total plus grand et plus facile qu'une série de petites arches établies sur des piles un peu plus faibles, mais plus nombreuses.

Avant de passer en revue divers ponts construits en France ou ailleurs, nous allons présenter quelques considérations sur l'établissement des culées dans les ponts où les arches sont *en anse de panier*.

DÉTERMINATION DE LA FORME QU'IL CONVIENT DE DONNER À LA PARTIE SUPÉRIEURE DES CULÉES (*DIGRESSION*).

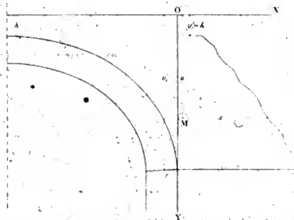
49. Nous prendrons pour exemple les culées sur lesquelles devrait s'appuyer l'arche étudiée dans le numéro précédent.

D'après ce qui a été dit jusqu'ici, nous considérerons la partie déterminée du profil d'une culée comme étant formée par : une verticale passant par le point inférieur de l'intrados, la ligne de joint des naissances, la verticale menée par le point inférieur de l'extrados, et une horizontale menée au niveau du sommet de l'extrados (*). Nous supposerons la culée terminée latéralement par le plan des têtes, quoique, dans certains cas, il soit préférable de donner aux culées une largeur croissante à partir du massif, au moyen de murs en aile. Le problème à résoudre est la détermination de la forme qu'il convient de donner à la partie extérieure du profil de la culée, ou à la partie qui limite la face de la culée opposée au massif, cette face étant supposée perpendiculaire aux plans des têtes.

(*) Si l'on pouvait compter sur la résistance du sol aux abords du pont, il suffirait d'élever les maçonneries de la culée jusqu'à la hauteur du point inférieur de l'extrados, puisque la partie supérieure de la culée doit seulement résister à l'action exercée par le massif agissant comme un fluide; mais il serait à craindre, dans le cas d'un débordement des eaux, que les abords ne fussent emportés ou du moins profondément ravinés, ce qui compromettrait la stabilité du pont. Il sera donc généralement plus prudent d'élever les maçonneries des culées jusqu'au niveau du sommet de l'extrados.

Considérons l'équilibre de la partie de l'une des culées limitée dans le sens vertical par deux plans horizontaux dont les ordonnées sont y'_1 et y'_1 égales respectivement aux ordonnées du sommet et du point inférieur de l'extrados. Admettons que, suivant l'habitude, on ne tienne aucun compte de la butée des terres qui s'exerce sur la face de la culée opposée au massif. Rappelons que le massif exerce sur la culée la même pression que si le massif était un liquide ayant la même densité, s'étendant jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados, et soumis, à sa partie supérieure, à une pression représentée par la hauteur $y'_1 = h$ des matériaux qui s'élèvent au-dessus de ce plan. La culée est censée soumise à la même pression verticale s'exerçant sur sa partie supérieure.

Ceci posé, faisons passer un axe vertical O'Y par le point inférieur de l'extrados, et conservons le même axe des x que dans tout ce qui précède.



Soient x et y' les coordonnées d'un point du profil de la face de la culée opposée au massif;

p le poids de la partie de la culée qui est limitée inférieure-

ment par un plan horizontal ayant y' pour ordonnée, augmenté de la charge que supporte la culée supérieurement;

ϖ' le poids de l'unité de volume des matériaux qui composent la culée;

f le coefficient de frottement moyen de ces matériaux que nous supposerons, pour plus de simplicité, disposés par couches horizontales infiniment minces. (La lettre f ne figure avec cette nouvelle signification que dans ce numéro; on ne la confondra donc pas avec la flèche des arches.)

D'après ce que nous avons vu, nº 28, la résultante des forces horizontales exercées par le massif sur la culée est représentée par

$$\int \varpi \lambda y' dy',$$

lorsque l'on a $i = 1$.

La condition d'équilibre de la portion de culée limitée inférieurement à l'ordonnée y', que fournit la considération des forces horizontales, est simplement

$$fp > \int \varpi \lambda y' dy',$$

lorsque l'on fait abstraction de la cohésion. Différentiant cette inégalité et substituant pour dp sa valeur

$$dp = \varpi' \lambda x dy',$$

on en déduit

$$y' < f \frac{\varpi'}{\varpi} x.$$

Il est possible de satisfaire à cette inégalité de bien des manières différentes. Soit f' un nombre plus petit que f, on pourra écrire

$$y' = f' \frac{\varpi'}{\varpi} x,$$

et le profil de la culée sera une ligne droite passant par l'origine des coordonnées et inclinée au-dessous de l'horizontale, d'une quantité moindre que l'angle du frottement multiplié par le rapport de la densité de la culée à celle du massif.

Soit a une constante positive, l'inégalité précédente sera encore satisfaite si l'on pose

$$y' = f\frac{\varpi''}{\varpi}(x - a),$$

d'où

$$x = a + \frac{1}{f}\frac{\varpi}{\varpi''}y',$$

et même, si dans cette relation on remplace f par f'; mais cela ne sera pas nécessaire, puisque le poids des terres qui viendront s'appuyer sur le profil de la culée déterminera une pression verticale sensiblement égale au poids de la culée lorsque a sera une petite longueur, et que, par suite, le frottement limite fp se trouvera à peu près doublé.

Si nous supposons $\varpi'' = \varpi$, et que nous prenions avec M. Boistard $f = 0{,}76$, nous pourrons donner au profil une inclinaison de 37° 14' sur l'axe des x. Les bases supérieure et inférieure du trapèze qui forme les faces latérales de la partie des culées dont nous nous occupons, devraient excéder respectivement $\frac{y'_0}{0{,}76}$ et $\frac{y'_1}{0{,}76}$ ou 0m,854 et 24m,60 environ; la largeur moyenne de ce trapèze serait donc plus grande que 12m,73.

Le frottement développé peut théoriquement prendre toute valeur nécessaire à la stabilité dans le cas actuel; mais, en pratique, il convient que la poussée horizontale exercée sur la culée reste inférieure à la cohésion des matériaux dont elle est formée, alors même que cette poussée serait inférieure au frottement théorique.

Soit $\varkappa$ la cohésion par unité superficielle, la condition d'équilibre relative à la cohésion serait exprimée par l'inégalité

$$\varkappa\lambda x > \frac{1}{2}\varpi\lambda\,(y'^2 - y_0'^2),$$

d'où, a' désignant une constante positive,

$$x - a' = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\varkappa}(y'^2 - y_0'^2).$$

Le profil fourni par cette considération est une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des x, et la concavité est dirigée vers les x positifs : cette parabole coupe l'horizontale menée par le sommet de l'extrados au point dont l'abscisse est a', puisque l'équation du profil est satisfaite par le système de valeurs $x = a'$, $y' = y'_0$. On pourrait aussi satisfaire à l'inégalité précédente en substituant dans l'équation de la parabole un coefficient $\varkappa' < \varkappa$ à la place de ce dernier.

Il faudrait, pour se conformer aux indications de quelques ingénieurs, employer celui des deux profils rectiligne et parabolique pour lequel l'abscisse x relative à la même valeur de y' est la plus grande.

Soit l l'excès de l'abscisse du profil rectiligne sur celle du profil parabolique pour une même ordonnée y', et posons

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{f}\frac{\varpi}{\varpi'}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{\varpi}{\varkappa},$$

d'où

$$m = \frac{1}{f}\frac{\varkappa}{\varpi'};$$

on aura

$$l = a - a' + \frac{y_0'^2}{2n} + \frac{y'}{n}\left(m - \frac{1}{2}y'\right):$$

la quantité $a - a'$ étant arbitraire, nous pourrons, pour fixer les idées, la supposer assujettie à la condition

$$a - a' + \frac{y_0'^2}{2n} = 0,$$

et l'on aura simplement

$$l = \frac{y'}{n}\left(m - \frac{1}{2}y'\right).$$

Sous cette forme, on voit aisément que l'on aura d'abord $l = 0$ pour $y' = 0$; c'est-à-dire que les deux profils se couperont en un point de l'axe des x qui aura pour abscisse $x = a$. La différence l restera positive tant que l'on aura $y' < 2m$, et les deux profils se

couperont de nouveau au point dont l'ordonnée est $y' = 2m$; au delà, la quantité l deviendra négative, c'est-à-dire que le profil parabolique aura son abscisse plus grande que le profil rectiligne d'une quantité qui deviendra $\frac{l}{n}\left(\frac{1}{2}y_1 - m\right)$ au point le plus bas des deux profils.

Soient $\varpi = \varpi' = 2440$ kil., $x = 10000$ kil., et, comme plus haut, $f = 0,76$; on aura $n = 4^m,16$, $m = 5^m,39$. Les deux profils se rencontreront au point dont l'ordonnée est $10^m,78$; et, en observant que l'ordonnée y'_1 est $18^m,74$, on trouvera que l'écart horizontal de ces profils s'élève jusqu'à $18^m,19$. Cette grande différence tient au coefficient x que nous avons lieu de croire beaucoup trop faible. (Dans les expériences relatives à la cohésion, les blocs sur lesquels on a expérimenté se détachaient en tournant autour d'une arête au lieu de glisser horizontalement sur leurs bases.) Il ne serait pas nécessaire de doubler le coefficient x pour que les assises du profil parabolique deviennent toutes moindres que celles du profil rectiligne. Si l'on observe d'ailleurs que l'on n'a pas tenu compte de la butée des terres, on n'hésitera pas à adopter ce dernier profil dans toute l'étendue comprise entre les plans horizontaux dont les ordonnées sont y'_0 et y'_1.

Ayant admis, soit le profil rectiligne, soit le profil mixtiligne, déterminé à l'aide d'une valeur convenable de x, il ne serait pas sans intérêt de faire l'application de l'équation des moments à la portion de la culée limitée inférieurement par l'ordonnée quelconque y'. Pour cela, il faudrait supposer connue la loi de répartition des pressions dans le plan inférieur, admettre, comme Navier par exemple, qu'elles varient uniformément entre les limites de l'abscisse x, de sorte qu'en désignant par μ'' la hauteur qui représente la pression en un point du plan (y') dont ξ'' serait l'abscisse, on puisse poser

$$\mu'' = \mu''_0 + b\xi'':$$

l'équation des moments, jointe à celle des projections verticales

des forces, servirait à déterminer les valeurs des constantes μ''_0 et b en fonction de y'. La quantité μ'', qui deviendrait fonction des deux variables indépendantes y' et ξ'', devrait être assujettie à ne point prendre de valeur négative, car ce serait supposer que l'on tient compte de la résistance à la rupture par traction; mais cette condition ne pourrait être vérifiée qu'*a posteriori*. Ajoutons encore qu'il ne parait pas probable que les pressions varient dans l'étendue de couches horizontales formées de parties disjointes, commes elles varieraient dans l'étendue de la surface de joint de deux blocs uniques (*).

(*) Nous allons présenter ici la détermination des constantes μ''_0 et b de l'équation

$$\mu'' = \mu''_0 + b\,\xi''.$$

pour le cas du profil rectiligne

Soit, pour abréger,

$$\frac{\varpi}{\varpi''} = i';$$

l'équation du profil rectiligne s'écrira

$$x = a + \frac{i'}{f}\,y',$$

et l'on aura

$$dy' = \frac{f}{i'}\,dx$$

Formons l'équation d'équilibre des forces qui sollicitent la portion de la culée comprise entre les plans horizontaux (y'_0) et (y') projetées sur l'axe des y. Le poids d'une tranche horizontale d'épaisseur égale à dy' est

$$dp = \varpi''\lambda x\,dy' = \varpi''\lambda\,\frac{f}{i'}\,x\,dx.$$

La composante parallèle à l'axe des y de la réaction élémentaire exercée contre le plan (y') sur l'étendue $\lambda\,d\xi''$ est

$$-\varpi''\lambda\mu''\,d\xi'' = -\varpi''\lambda(\mu''_0 + b\,\xi'')\,d\xi''.$$

Intégrant ces deux expressions, la première entre les limites x_0 et x, la seconde entre les limites $\xi'' = 0$ et $\xi'' = x$, puis égalant la somme des deux intégrales à zéro, il vient

$$\frac{f}{2i'}(x^2 - x_0^2) - \mu''_0\,x - \frac{1}{2}\,b\,x^2 = 0.$$

Prenons actuellement les moments autour d'un axe passant par le point M (voir

On pourrait encore faire un autre usage de l'équation des moments. Considérons l'équilibre de la partie de la culée qui est

---

la figure), afin d'éliminer ceux des forces horizontales développées dans le plan inférieur. Le moment élémentaire de dp, dans le sens de x vers y, est

$$\frac{\varpi'\lambda f}{2i'} x^2 dx;$$

celui de la composante parallèle à l'axe des y de la réaction élémentaire développée dans le plan (y') est d'ailleurs

$$-\varpi'\lambda(\mu''_0 \xi + b\xi^2) d\xi.$$

Quant au moment élémentaire de la poussée horizontale exercée par le massif contre la culée; soit v l'ordonnée variable du point d'application, on aura pour expression du moment de la poussée élémentaire $\varpi\lambda v dv$, autour de M,

$$\varpi\lambda(y'-v)v\,dv,$$

quantité qui doit être intégrée entre les limites y'_0 et y'.

Effectuant entre leurs limites respectives les intégrations des trois expressions précédentes, et égalant la somme à zéro, il vient

$$\frac{f}{6i'}(x^3 - x_0^3) - \frac{\mu''_0}{2}x^2 - \frac{b}{3}x^3 + \frac{i'}{6}(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3) = 0.$$

Cette équation, jointe à celle des forces verticales, donne d'abord

$$-2\mu''_0 x^2 - bx^3 = -\frac{f}{i'}x^3 + \frac{f}{i'}x x_0^2,$$

$$+3\mu''_0 x^2 + 2bx^3 = +\frac{f}{i'}x^3 - \frac{f}{i'}x_0 x_0^2 + i'(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3).$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$x^2(\mu''_0 + bx) = \frac{f}{i'}x_0^2(x - x_0) + i'(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3).$$

Soit

$$\mu''_x = \mu''_0 + bx,$$

en sorte que μ''_x représente la pression qui a lieu aux points du plan (y') où celui-ci est limité par le profil de la culée, on aura

$$\mu''_x = \frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}(x - x_0) + \frac{i'}{x^2}(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3);$$

limitée inférieurement par le plan (y'). Les forces qui sollicitent cette partie de la culée sont : 1° son propre poids augmenté de

---

les équations précédentes fournissent aisément les valeurs séparées de μ''_0 et b:

$$\mu''_0 = \frac{f}{i'}x - \frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}(2x - x_0) - \frac{i'}{x^2}(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3).$$

$$b = -\frac{f}{i'} + \frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}\left(\frac{3x - 2x_0}{x}\right) + \frac{2i'}{x^3}(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3).$$

Il convient d'exprimer les valeurs de x et x_0 en fonction de y' et y'_0. Or, si nous posons

$$c = \frac{f}{i'}a,$$

nous aurons

$$x = \frac{i'}{f}(y' + c),$$

d'où

$$x_0 = \frac{i'}{f}(y'_0 + c);$$

à l'aide de ces valeurs, il viendra

$$\mu''_x = \left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 (y' - y'_0) + \frac{f^2}{i'}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^2},$$

$$\mu''_0 = y' + c - \left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 (2y' - y'_0 + c) - \frac{f^2}{i'}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^2},$$

$$b = -\frac{f}{i'} + \frac{f}{i'}\left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 \frac{(3y' - 2y'_0 + c)}{y' + c} + 2\frac{f^2}{i'^2}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^3}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $i' = 1$, et que les quantités y'_0 et c soient nulles, le profil de la culée sera triangulaire et passera par l'origine des coordonnées; alors les formules précédentes donneront

$$\mu''_x = f^2 y', \qquad \mu''_0 = (1 - f^2)y':$$

dans le cas de $f = \frac{2}{3}$, ces valeurs deviendront, à cause de $y'_0 = 0$ et $c = 0$,

$$\mu''_x = \frac{4}{9}y', \qquad \mu''_0 = \frac{5}{9}y'.$$

La comparaison de ces nombres montre que les pressions varieraient seulement de deux neuvièmes de leur valeur moyenne dans l'étendue d'un même plan horizontal. De cette manière, il y a lieu de croire que l'hypothèse de la variation uniforme des pressions ne serait pas très-éloignée de se réaliser. En prenant $f = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$, on trouverait $b = 0$; d'où $\mu'' = \frac{1}{2}y'$, quantité constante avec y'.

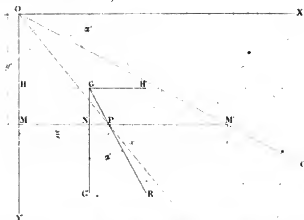
la charge qui peut agir supérieurement; 2° la poussée horizontale exercée par le massif; 3° les réactions qui se développent contre le plan (y'). Les composantes horizontales et verticales des premières forces sont connues, et donnent par un simple changement de signe les valeurs des composantes des réactions dans le plan (y'). Les moments des premières forces sont pareillement connus, en sorte que, si l'on substitue dans l'équation des moments les composantes connues de la résultante des réactions contre le plan (y'), cette équation ne contiendra d'autres inconnues que les coordonnées du point d'application de la résultante des réactions.

Soient ξ et η ces coordonnées, l'équation des moments présentera une relation entre ξ, η et y' qui n'est autre chose que l'équation de la droite suivant laquelle agit la résultante des réactions. La direction de cette résultante dépend de la valeur de y' que l'on considère, de sorte que, pour chaque valeur de y', on aura une droite particulière. Si l'on suppose construites les diverses droites qui répondent à toutes les valeurs possibles de y', les intersections deux à deux des droites consécutives détermineront leur *courbe enveloppe*. Pour obtenir l'équation de cette courbe, il suffira, suivant la théorie connue des *courbes enveloppes*, d'éliminer y' entre l'équation des moments et sa dérivée par rapport à la même quantité y'.

Si l'on fait $\eta = y'$ dans l'équation des moments ou de la droite suivant laquelle agit la résultante des réactions, cette équation fournira l'abscisse ξ du point d'application de la résultante dans le plan (y'). L'équation que l'on obtiendra ainsi entre ξ et η est celle du lieu géométrique des points de rencontre des résultantes des réactions exercées sur les divers plans (y') avec ces mêmes plans. Cette courbe est celle que l'on nomme *courbe des pressions*. La direction de la résultante s'obtiendrait en tirant de l'équation entre ξ, η et y' le rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$ qui est égal à la tangente de l'angle formé par la résultante avec l'axe des x, et compté de x vers y. On aurait encore cette direction en menant par le point de rencontre avec le plan (y') une tangente à la *courbe enveloppe*.

Au lieu de développer l'analyse qui vient d'être indiquée, nous nous bornerons à présenter la détermination de la direction de la résultante des pressions et la construction de la *courbe des pressions*, dans le cas très-simple où le massif et la culée ayant la même densité, le profil extérieur de celle-ci est rectiligne, et aboutit dans sa partie supérieure à l'origine des coordonnées, la poussée exercée par le massif étant supposée, contrairement à ce que nous avons admis jusqu'ici, commencer à se produire en ce point.

Nous aurons recours à des considérations très-élémentaires de statique et de géométrie, et quoique les données actuelles soient sensiblement différentes des données primitives, le résultat sera cependant de nature à faire entrevoir ce qui devrait se passer s'il s'agissait de celles-ci.



Soient OC le profil rectiligne de la culée faisant avec l'horizontale l'angle α' (*); y' l'ordonnée d'un plan horizontal MM'; G le centre de gravité du triangle OMM' dont l'ordonnée est $\frac{2}{3}y'$; H, le

(*) Cet angle ne doit pas être confondu avec l'auxiliaire α' des n°ˢ 36 et suivants.

point d'application de la poussée horizontale exercée par le massif et dont l'ordonnée est aussi $\frac{2}{3}y'$, en vertu de l'hypothèse de la fluidité.

Le poids de la partie supérieure de la culée limitée au plan MM' est $\frac{1}{2}\varpi\lambda y'x$, la résultante des pressions horizontales produites sur cette partie par le massif est simplement $\frac{1}{2}\varpi\lambda y'^2$. D'après ce qui vient d'être dit, ces forces concourent au point G, et la direction de leur résultante s'obtiendra en menant par ce point deux droites, l'une verticale, l'autre horizontale, respectivement proportionnelles aux intensités de ces forces, ou aux coordonnées x et y', et achevant le parallélogramme qui se résout ici en le rectangle G'GH'R. De cette manière, le triangle G'GR que l'on obtiendra sera semblable au triangle MM'O; l'angle G'GR sera égal à l'angle MM'O et aussi à l'angle M'OX que fait le profil avec l'horizontale. Il s'ensuit que la direction GR de la résultante des réactions est constante pour les divers plans horizontaux MM', et que cette direction fait avec la verticale un angle égal à celui du profil avec l'horizon. On voit déjà que la condition d'équilibre relative au frottement est que ce dernier angle soit moindre que *l'angle du frottement.*

Soit ξ l'abscisse du point P où la résultante des réactions rencontre le plan MM'; l'angle G'GR étant égal à COX ou α', on aura

$$\xi = \overline{MN} + \overline{NP} = \overline{HG} + \overline{NG}\tang\alpha',$$

ou, à cause de $\overline{HG} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}x$, et $\overline{NG} = \frac{1}{3}y'$,

$$\xi = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y'\tang\alpha'.$$

Exprimons d'abord ξ en fonction de x : en vertu de

$$y' = x\tang\alpha',$$

il viendra

$$\xi = \frac{1}{3\cos^2\alpha'}x.$$

Si l'on suppose α' égal à l'angle du frottement, et que l'on prenne, comme quelques auteurs, $\tang \alpha' = \frac{2}{3}$, on aura $\xi = \frac{13}{27} x$: la résultante des pressions passera, comme on le voit, très-près du milieu de la base MM'; pour qu'elle passât exactement au milieu, il faudrait que l'on eût $\tang \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$ ou $\alpha' = 35^\circ\, 15'\, 52''$. Cette valeur de $\tang \alpha'$ est presque la moyenne exacte entre le coefficient $\frac{2}{3}$ et le coefficient 0,76 indiqué par M. Boistard.

En éliminant x entre les deux dernières équations, et changeant ensuite y' en η, nous aurons pour équation de la *courbe des pressions*,

$$\xi = \frac{2}{3 \sin 2\alpha'} \eta,$$

ou

$$\eta = \frac{3}{2} \sin 2\alpha' \xi.$$

Cette équation montre que la courbe des pressions se réduit ici à une ligne droite passant par l'origine et inclinée sur l'axe des x d'une quantité égale à $\frac{3}{2} \sin 2\alpha'$; c'est la droite OP de la figure. Son inclinaison serait égale à $\frac{18}{13}$ dans le cas de $\tang \alpha' = \frac{2}{3}$, et à $\sqrt{2}$ dans le cas de $\tang \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans cette dernière hypothèse, la droite OP se confondrait avec la direction PR des pressions.

Généralement, les directions PR menées par les divers points P étant toutes parallèles, n'ont pas de *courbe enveloppe*, ou du moins une telle courbe doit se réduire à une droite parallèle à PR, dont on ne considérerait que les points situés à l'infini.

Nous terminerons cette digression en faisant remarquer que l'établissement de la culée d'une arche *complète* serait entièrement fixé d'après ce que nous venons d'exposer, si le plan horizontal passant par le point inférieur de l'extrados, contre lequel s'appuie le dessus de la culée, présentait une résistance indéfinie; si, par

exemple, le roc vif affleurait à ce niveau. Dans le cas contraire, il y aura à considérer une autre portion de la culée sollicitée par des forces connues qui sont : 1° les actions qu'exerce la partie de la culée que nous venons d'étudier ; 2° la force de direction presque verticale T_1 que nous avons calculée précédemment ; et sollicitée en outre par les forces inconnues qui proviennent, tant du propre poids de la construction, que des réactions du sol et des actions fortuites ou accidentelles, lorsqu'on en voudra tenir compte.

EXAMEN RAPIDE ET SUCCINCT DE QUELQUES ARCHES DE PONTS DÉCRITES DANS LES OUVRAGES DE PERRONET ET GAUTHEY.

50. Dans les numéros précédents, nous avons présenté avec les plus grands détails l'ensemble des calculs à effectuer pour fixer définitivement les formes et dimensions d'une arche projetée, ainsi que les poussées auxquelles l'arche devra donner naissance dans son état normal. Nous nous abstiendrons d'entrer ici dans ces détails : examinant diverses arches décrites dans les ouvrages de Perronet et Gauthey, nous prendrons, soit dans le texte, soit dans les figures qui l'accompagnent, les dimensions principales de ces arches. La quantité h qui suppose la construction terminée supérieurement par un plan horizontal, tandis que le profil du pavé et des trottoirs est loin d'être rectiligne, ne peut être estimée qu'en remplaçant ce profil par une droite horizontale disposée de manière à ne pas changer la superficie de la section. Le plus souvent, en l'absence des données, nous supposerons h très-voisin de $0^m,65$. L'incertitude qui affecte cette quantité affecte également les ordonnées Y_0 et Y_1 ; mais leur différence f en est exempte.

Partant des données spéciales à chaque cas, nous nous proposerons de déterminer les constantes principales à l'aide de nos Tables, comme s'il s'agissait de faire un avant-projet. Nous suivrons dans ces calculs la marche tracée au n° 45. La comparaison des valeurs trouvées avec celles adoptées pourra donner lieu à une

courte critique : et, en ce qui concerne les arches *en anse de panier,* nous espérons que le rapprochement des résultats auxquels l'examen de chaque arche en particulier nous aura conduit, pourra jeter quelque lumière sur la question des limites qu'il convient d'assigner au surbaissement des arches de cette espèce.

ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE.*

Pont de Valence, sur le Guadalaviar.

Cet ouvrage, dit Gauthey, est composé de dix arches de 13 mètres d'ouverture, dont la flèche est à peine de $1^m,3$. En l'absence d'autres données, nous supposerons l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,69$, et nous admettrons que les matériaux dont on a pu disposer présentent une résistance au moins égale à celle des pierres de Saillancourt 2e qualité, dont le $\frac{1}{10}$ est $42^m,9$. Les données seront ainsi :

$$g = 6^m,50; \quad f = 1^m,30; \quad Y_0 = 1^m,69; \quad \mu_1 = 42^m,9,$$

d'où
$$\frac{g}{f} = 5,00; \quad \frac{Y_0}{f} = 1,3.$$

Avec ces deux derniers nombres, la Table I donne $\frac{Q'}{f'} = \bar{1}8,961$, et l'on en déduit (valeur approchée) $Q' = 32,044$. On trouve ensuite par la formule (I), $\mu_0 = 41^m,551$, et, par la formule (II) (valeur approchée), $e = 0^m,793$. On tire ensuite de la Table II, $\frac{\delta(Q')}{e'} = 0,3482$, d'où

$$\delta(Q') = \underline{\quad 0,219}$$

puis
$$Q' = 32,263.$$

Par la formule (V), il vient $h'' = 1^m,684$; et, en reprenant le calcul de e par la formule (II) à l'aide des valeurs corrigées, on trouve

finalement $e = 0^m,7986$. La valeur $h = 0^m,885$ qui en résulte n'est pas trop faible. Cette quantité pouvant, en pratique, recevoir une moindre valeur, on en conclut que le pont de Valence aurait pu être construit avec des matériaux moins résistants que nous ne l'avons supposé : les épaisseurs auraient alors reçu un accroissement égal à la réduction de l'ordonnée h.

Pont de Pont-Sainte-Maxence, sur l'Oise.

Ce pont, construit par Perronet, est formé de trois arches de $23^m,39$ d'ouverture et $2^m,09$ de flèche; l'épaisseur des voûtes au sommet est de $1^m,46$. Aux parements extérieurs, les voussoirs se prolongent jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados : nous ferons abstraction de cette particularité. Les piles, au lieu d'être pleines comme d'ordinaire, consistent en quatre colonnes de $2^m,923$ de diamètre, groupées par deux aux extrémités de chaque pile, de manière qu'il existe entre les colonnes intérieures un espace égal au diamètre de ces colonnes : en outre, les plans des têtes passent par les axes des colonnes extrêmes, de telle sorte que les moitiés extérieures des mêmes colonnes servent d'avant-becs et d'arrière-becs. La distance d'une tête à l'autre ou la largeur du pont est de $12^m,667$. D'après les dessins de Perronet, on peut admettre que l'ordonnée du sommet de l'intrados est égale à la flèche. Nous admettrons, en outre, que la hauteur h ait été fixée à $0^m,65$. Les matériaux employés dans la construction des voûtes sont les pierres de Saillancourt, et des pierres des environs de Pont-Sainte-Maxence, qui ont présenté à l'essai une résistance environ quatre fois plus grande que celles de Saillancourt.

Les données sont ainsi :

$$g = 11^m,695;\ f = 2^m,09;\ Y_0 = 2^m,09;\ h = 0^m,65;\ \lambda = 12^m,667,$$

d'où
$$\frac{g}{f} = 5,60;\quad \frac{Y_0}{f} = 1,0.$$

Avec ces deux nombres, on tire de la Table I: $\frac{Q'}{f^2} = 18,6935$,

d'où (valeur approchée) $Q' = 81,656$. Les formules (o) et (III) donnent (valeur approchée) $e = 1^m,44$, et l'on a, par la Table II, $\frac{\delta(Q')}{e'} = 0,3422$, d'où

$$\delta(Q') = \underline{0,710}$$

puis

$$Q' = 82,366.$$

Par la formule (v), on a ensuite

$$h'' = 2^m,0813,$$

d'où

$$e = 1^m,4313.$$

Actuellement les formules (IV) donnent

$$\mu_0 = 58^m,674; \qquad \mu_1 = 60^m,838.$$

On aurait pour épaisseur réelle à la clef $\varepsilon_0 = 1^m,44$, quantité qui diffère seulement de 2 centimètres de celle adoptée par Perronet. Au reste, ce rapprochement tient uniquement au choix que nous avons fait des données Y_0 et h. Quant à la valeur de μ_1, on voit qu'elle est environ $\frac{1}{9,5}$ de la résistance absolue 581 mètres des pierres de Saillancourt 1re qualité, et environ $\frac{1}{38}$ de la résistance de celles de Pont-Sainte-Maxence, d'après ce qui a été dit plus haut. Il est facile d'en conclure que si nous avions pris pour donnée $\mu_1 = 58^m,1$ à la place de h, nous aurions obtenu une valeur de e un peu plus faible et une valeur de h d'autant plus forte.

Déterminons maintenant la limite inférieure de l'épaisseur des piles. Pour cela nous aurons d'abord, par la première équation (XII),

$$q' = 167,960,$$

puis ensuite, par les formules (XIV),

$$y''_1 = 4^m,1641; \quad \alpha_1 = 23^\circ\ 1'.$$

On en déduit pour la largeur minimum $2e\sin\alpha_1$ à donner aux piles en leur partie supérieure, $2e\sin\alpha_1 = 1^m,119$. La charge que supportent les piles en cette partie est représentée par μ_1; si l'on veut que les piles ne soient pas plus chargées à leur base, il faudra à très-peu près augmenter leur largeur d'une fraction égale au rapport de la hauteur des piles à la quantité μ_1; or cette hauteur étant de $5^m,846$, il faudrait augmenter la largeur ci-dessus de la fraction $\frac{5,846}{60,838} = 0,096$, ou de $0^m,107$, ce qui porterait la limite inférieure de la largeur des piles à $1^m,226$, et la limite inférieure de la section horizontale à $1^m,226.\lambda$ ou $15^{m.q},53$. Pour comparer cette section à celle réalisée par Perronet, nous pourrons réduire à trois le nombre des colonnes qui supportent le poids des arches, à cause de la situation des colonnes extrêmes; de cette manière, la somme des sections horizontales sera $3\frac{\pi}{4}(2,923)^2 = 20^{m.q},13$. En comparant ce nombre à la limite théorique $15^{m.q},53$, on voit que le célèbre ingénieur ne s'en est écarté que de la fraction 0,296 ou environ trois dixièmes. A vrai dire, les colonnes qui servent de piles supportent une charge verticale un peu moindre que μ_1, attendu que le poids des voûtes a été diminué au moyen de *lunettes* pratiquées dans le sens de la longueur du pont. Quoi qu'il en soit, on peut conclure, de la comparaison que nous venons de faire, qu'il serait suffisant d'augmenter de $\frac{1}{3}$ la largeur limite $2e\sin\alpha_1$ des piles, lorsqu'il s'agira d'établir des ponts dans des conditions comparables à celles que présente celui de Pont-Sainte-Maxence.

Pont de Mirepoix, sur le Lers.

Ce pont est formé de sept arches de $19^m,5$ d'ouverture et de $2^m,612$ de flèche. Les autres données nous manquant, nous sup-

poserons l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,5672$, et nous admettrons que les matériaux présentent une résistance au moins égale à celle de la pierre de Saillancourt 2e qualité. En fixant la limite des charges au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue, nous aurons le système de données suivant :

$$g = 9^m,75; \quad f = 2^m,612; \quad Y_0 = 1^m,5672; \quad \mu_1 = 42^m,9,$$

d'où $$\frac{g}{f} = 3,7328; \quad \frac{Y_0}{f} = 0,6.$$

En procédant comme dans le premier exemple, on trouvera

$$\mu_0 = 40^m,164; \quad h'' = 1^m,5607; \quad e = 0^m,9835;$$
$$h = 0^m,5772; \quad Q' = 38,610.$$

L'épaisseur e pourra paraître un peu forte, et la charge h un peu faible ; pour diminuer la première et augmenter la seconde, il suffirait de faire μ_1 un peu plus fort (50 mètres par exemple).

Pont de Homps, sur l'Aude.

Ce pont, construit par M. Ducros, se compose de trois arches de $21^m,4$ d'ouverture et de $2^m,87$ de flèche. (Nous n'aurons point égard aux petites *cornes de vache* que l'on a pratiquées dans le voisinage des têtes.) Nous compléterons les données précédentes par des nombres supposés. Soient donc

$$g = 10^m,70; \quad f = 2^m,87; \quad Y_0 = 1^m,722; \quad h = 0^m,652,$$

d'où $$\frac{g}{f} = 3,7282; \quad \frac{Y_0}{f} = 0,6;$$

on trouvera, en procédant comme dans le deuxième exemple :

$$Q' = 46,508; \quad h'' = 1^m,7149; \quad e = 1^m,0629;$$
$$\mu_0 = 44^m,762; \quad \mu_1 = 47^m,766.$$

La valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{9}$ environ de la résistance absolue de la pierre de Saillancourt 2e qualité, et se trouve au-dessous de $\frac{1}{12}$ de celle qui se rapporte à la 1re qualité.

Pont de Pesmes, sur l'Ognon.

Ce pont, construit par M. Bertrand, est composé de trois arches de $13^m,64$ d'ouverture et de $1^m,19$ de flèche; l'épaisseur à la clef adoptée dans la construction est de $1^m,19$, égale à la flèche. Comme dans les exemples précédents, nous joindrons à ces nombres des données hypothétiques; nous partirons des données suivantes :

$$g = 6^m,82; \quad f = 1^m,19; \quad Y_0 = 1^m,547; \quad h = 0^m,647,$$

d'où
$$\frac{g}{f} = 5,731; \quad \frac{Y_0}{f} = 1,3;$$

puis, en suivant la même marche que précédemment,

$$Q^2 = 35,216; \quad h' = 1^m,5411; \quad e = 0^m,8941;$$
$$\mu_0 = 40^m,332; \quad \mu_1 = 41^m,564.$$

L'épaisseur réelle à la clef $\varepsilon_0 = 0^m,9$ qu'on en déduit est moindre de $0^m,29$ que celle adoptée dans la construction, et cependant la valeur de μ_1 est inférieure au $\frac{1}{10}$ de la hauteur qui représente la résistance absolue des pierres de Saillancourt 2e qualité et de Conflans.

Pont Fouchards, sur le Thouet, à Saumur.

Ce pont, construit sur le projet de M. de Limay, est formé de trois arches de $25^m,99$ d'ouverture et de $2^m,635$ de flèche. Nous supposerons les données qui nous manquent. Soient

$$g = 12^m,995; \quad f = 2^m,635; \quad Y_0 = 1^m,8445; \quad \mu_1 = 62^m,5$$

(la valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue de la roche douce de Bagneux); on aura d'abord

$$\frac{g}{f} = 4,9316; \qquad \frac{Y_0}{f} = 0,7;$$

puis, pour résultat final des calculs,

$$Q' = 75,409; \quad e = 1^m,2827; \quad h'' = 1^m,8379;$$
$$h = 0^m,5552; \quad \mu_0 = 59^m,772.$$

On pourrait faire ici les mêmes remarques qu'à l'occasion du pont de Mirepoix.

Pont de Saint-Diez, sur la Meurthe.

Ce pont, construit sur les dessins de M. Lecreulx, se compose de trois arches de 12 mètres d'ouverture sur 1 mètre de flèche, et de deux petites arches latérales en plein cintre de 4 mètres d'ouverture. Nous ne nous occuperons que des premières. Les données étant encore incomplètes, nous admettrons les suivantes:

$$g = 6^m,0; \quad f = 1^m,0; \quad Y_0 = 1^m,3; \quad h = 0^m,65,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 6,0; \quad \frac{Y_0}{f} = 1,3.$$

Le calcul conduit aux résultats que voici:

$$Q' = 27,112; \quad h'' = 1^m,2966; \quad e = 0^m,6466;$$
$$\mu_0 = 42^m,795; \quad \mu_1 = 43^m,823.$$

La valeur de μ_1 répond à peu près à $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres fermes de Conflans.

Pont de Brunoy, sur l'Hyères.

Ce pont a été construit sur les dessins de Perronet; il se compose de trois arches de $5^m,846$ d'ouverture et de $0^m,783$ de

flèche. L'épaisseur des voûtes à la clef est de $0^m,65$; l'ordonnée du sommet de l'intrados peut être évaluée à 1 mètre et quelques centimètres. Nous prendrons cette ordonnée égale à $1^m,0179$, et la hauteur h égale à $0^m,50$; en sorte que les données seront

$$g = 2^m,923;\quad f = 0^m,783;\quad Y_0 = 1^m,0179;\quad h = 0^m,50,$$

d'où $$\frac{g}{f} = 3,7331;\quad \frac{Y_0}{f} = 1,3.$$

On en déduit, par le calcul :

$$Q^2 = 6,784;\quad h'' = 1^m,0112;\quad e = 0^m,5112;$$
$$\mu_0 = 13^m,941;\quad \mu_1 = 14^m,777,$$

puis l'épaisseur réelle à la clef $e_0 = 0^m,5179$, quantité moindre de $0^m,132$ que celle adoptée par Perronet. La valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{8,7}$ de la résistance absolue de la lambourde de qualité inférieure, et à $\frac{1}{22}$ de celle de la pierre tendre employée à Paris.

Pont de Rosoi, sur l'Hyères.

Ce pont a été construit, comme le précédent, sur les dessins de Perronet; il est formé de deux arches de $7^m,80$ d'ouverture et de $0^m,975$ de flèche; l'ordonnée du sommet de l'intrados est de $1^m,25$ à $1^m,30$, d'après les dessins de Perronet; l'épaisseur des voûtes à la clef a été faite de $0^m,812$, et les voussoirs sont en grès très-dur. Au lieu de supposer que l'on ait à sa disposition des matériaux aussi résistants, nous admettrons que les matériaux ne présentent pas plus de résistance que le mortier ordinaire. En prenant le $\frac{1}{10}$ seulement de la résistance absolue représentée par 219 mètres, et supposant l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,2675$, nous aurons pour données

$$g = 3^m,90;\quad f = 0^m,975;\quad Y_0 = 1^m,2675;\quad \mu_1 = 21^m,9,$$

d'où $\frac{g}{f} = 4,00$; $\frac{Y_0}{f} = 1,3$.

On déduit de ces nombres:

$$Q^2 = 11,922; \quad e = 0^m,5960; \quad h'' = 1^m,2613;$$
$$h = 0^m,6653; \quad \mu_0 = 20^m,870.$$

L'épaisseur réelle à la clef est $\varepsilon_0 = 0^m,6022$: elle est moindre que celle adoptée par Perronet de $0^m,21$, et cependant la plus grande valeur de μ est extrêmement faible. La construction, réalisée avec des matériaux beaucoup plus résistants que nous ne l'avons supposé, présenterait donc une très-grande stabilité. La hauteur h est, du reste, très-admissible dans la pratique.

Pont de la Concorde, à Paris.

Ce pont, construit sur les dessins de Perronet, se compose de cinq arches d'ouvertures et de flèches inégales : la chaussée est disposée en pentes qui s'étendent seulement aux quatre arches latérales; elle est de niveau dans le sens de la longueur sur l'arche du milieu seulement. Il est facile de reconnaître qu'il était impossible de substituer au projet de Perronet celui d'un pont horizontal formé de cinq arches égales, sans élever le niveau des abords ou abaisser celui des naissances d'au moins 50 à 60 centimètres. Nous nous occuperons seulement de l'arche du milieu, qui a $28^m,6$ d'ouverture et $2^m,99$ de flèche, et à laquelle on a donné $1^m,14$ d'épaisseur à la clef : supposant l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,794$, et la charge h égale à $0^m,65$, nous aurons les données suivantes :

$$g = 14^m,30; \quad f = 2^m,99; \quad Y_0 = 1^m,794; \quad h = 0^m,65.$$

d'où $\frac{g}{f} = 4,7827$; $\frac{Y_0}{f} = 0,6$.

A l'aide de ces nombres et des précédents, on trouve la solution

$$Q^2 = 80,435; \quad h'' = 1^m,7891; \quad e = 1^m,1391;$$
$$\mu_0 = 71^m,642; \quad \mu_1 = 74^m,723;$$

l'épaisseur réelle à la clef s'en déduit $\varepsilon_0 = 1^m,144$. Cette dimension coïncide à peu près avec celle adoptée par Perronet. Quant à la valeur de μ_1, elle répond à $\frac{1}{7,8}$ environ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt que l'on a employées dans la construction.

ARCHES COMPLÈTES, DITES EN ANSE DE PANIER.

1°. *Pont de Nogent, sur la Seine.*

Ce pont, construit par Perronet, se compose d'une seule arche de $29^m,24$ d'ouverture et de $8^m,77$ de flèche, dont la voûte est construite en grès très-dur : malgré les rampes légèrement inclinées qui conduisent au milieu, nous procéderons comme si la chaussée était exactement horizontale dans le sens de la longueur du pont. En ajoutant aux données précédentes la charge $h = 0^m,65$ prise hypothétiquement, les données seront

$$g = 14^m,62; \quad f = 8^m,77; \quad h = 0^m,65.$$

En suivant la marche indiquée n° 45, nous aurons d'abord

$$\frac{g}{f} = 1,6671,$$

quantité qui répond sensiblement à un surbaissement de $\frac{3}{10}$. On tire ensuite de la Table III, relativement à la valeur de $\frac{g}{f}$,

$$\frac{f}{Y_1} = 0,81006, \quad \text{d'où } Y_1 = 10^m,826;$$

et les équations (x) donnent : $h'' = 2^m,0443$, $e = 1^m,3943$; puis il vient, par les équations (xi), $\mu_0 = 42^m,112$; $\mu_1 = 51^m,776$;

et l'équation (XXIII) donne, pour la superficie du profil de la demi-arche et de la partie correspondante du massif, $\frac{V}{\lambda} = e\mu_1 = 72^{m.q},192$.

La charge représentée par μ_1 est un peu faible, puisque les voussoirs ont été faits de grès très-dur; l'épaisseur est d'ailleurs peu différente de celle adoptée dans la construction, qui est de $1^m,60$ pour les voussoirs des têtes, et de $1^m,30$ pour les voussoirs intermédiaires. On eût pu diminuer l'épaisseur des voussoirs sans exagérer la charge μ_1, en diminuant la flèche et élevant d'autant les naissances, afin que le sommet de l'intrados restât au même niveau. La diminution de l'épaisseur aurait ainsi permis de réduire l'inclinaison des rampes.

En effet, soit $f = 8^m,44$, ce qui revient à diminuer la flèche de $0^m,38$, et, tout en conservant la même valeur de g, portons la valeur de μ_1 à $58^m,1$ ou au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité, les données seront

$$g = 14^m,62;\quad f = 8^m,44;\quad \mu_1 = 58^m,1,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 1,7322.$$

On aura, par la Table III,

$$\frac{f}{Y_1} = 0,83265,\quad \text{puis } Y_1 = 10^m,136.$$

Les équations (VIII), en ayant égard à la première équation (VII), donneront $\mu_0 = 48^m,990$; $e = 1^m,0481$; et il viendra, par les formules (IX), $h'' = 1^m,6901$; $h = 0^m,6420$; puis, par l'équation (XXIII), $\frac{V}{\lambda} = 60^{m.q},894$. [La formule (IX *bis*) donnerait plus exactement $e = 1^m,0482$; on voit que la deuxième équation (VIII) est suffisamment approchée.]

Ces nombres, comparés à ceux qui résultent des données primitives, présentent une réduction de $0^m,346$ sur les épaisseurs,

ou de près de $\frac{1}{4}$ sur les premières. La surface du profil de la voûte et du massif serait réduite de plus de $\frac{1}{7}$: il est vrai de dire que les culées devraient être élevées de $0^m,33$ de plus que dans la première solution; mais l'élévation des naissances faciliterait le débouché. La solution que nous présentons ici eût donc offert des avantages marqués sur celle adoptée par l'illustre constructeur de nos plus beaux ponts.

Pont de Mantes, sur la Seine.

La chaussée de ce pont formé de trois arches inégales, est disposée en rampes des deux côtés à partir du milieu; la pente est de $\frac{1}{72}$. Nous ferons abstraction de cette pente, et nous ne nous occuperons d'abord que de l'arche du milieu, dont l'ouverture et la flèche sont respectivement $38^m,98$ et $11^m,37$: la charge h peut être estimée approximativement à $0^m,74$. Les données sont ainsi :

$$g = 19^m,49; \quad f = 11^m,37; \quad h = 0^m,74;$$

d'où $\frac{g}{f} = 1,7142$, et, par la Table III, $Y_1 = 13^m,753$. En procédant comme dans l'exemple précédent, on trouve

$$h'' = 2^m,3714; \quad e = 1^m,6314; \quad \mu_0 = 58^m,075;$$
$$\mu_1 = 70^m,498; \quad \frac{V}{\lambda} = 115^{m.q},01.$$

Les pierres employées à la construction des voûtes du pont de Mantes sont celles de Saillancourt, dont la résistance absolue est représentée par 581 mètres. La valeur de μ_0 coïncide avec le dixième de cette dernière quantité, tandis que celle de μ_1 s'en écarte notablement : elle répond en effet à $\frac{1}{8}$ environ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt. Si, à l'exemple de beaucoup d'ingénieurs, on n'a égard qu'à la pression au sommet, on trouvera que la pierre employée présente une suffisante résis-

tance. Cela est du reste assez admissible, puisque c'est au sommet que les pressions varient le plus par l'action des surcharges accidentelles, et que ces dernières ne produisent que peu d'effet sur les voussoirs inférieurs : si donc les voussoirs peuvent résister à la charge μ_0 au sommet de la voûte, et en outre à l'action des surcharges, il est vraisemblable qu'ils résisteront encore à la charge μ_1 qui a lieu dans les plans des naissances, augmentée de ses très-faibles variations. Quoi qu'il en soit, il serait évidemment préférable d'employer de la pierre plus résistante.

L'épaisseur adoptée dans la construction est de 1^m,949; mais Perronet avoue qu'on aurait pu la réduire à 5 pieds ou 1^m,624, nombre qui coïncide à très-peu près avec la valeur $\varepsilon_0 = 1^m,6431$ que fournit notre solution. On doit remarquer que cette réduction de l'épaisseur à la clef eût permis de diminuer la pente longitudinale de la chaussée.

Actuellement nous allons examiner s'il n'eût pas été possible, sans élever les abords, de construire un pont horizontal formé de trois arches égales ayant leurs naissances au niveau de l'étiage. (Les naissances dans la construction sont à 0^m,974 au-dessous de l'étiage.)

Les arches latérales ont 35^m,07 d'ouverture, et les piles ont 7^m,80 de largeur : en ajoutant au premier de ces nombres la demi-ouverture 19^m,49 de l'arche du milieu, on a pour la demi-longueur du débouché 54^m,56, dont le tiers donne, pour la demi-ouverture d'arches égales, $g = 18^m,1867$. La demi-longueur du pont s'obtiendra en ajoutant la largeur d'une pile à la demi-longueur du débouché, ce qui donnera 62^m,36, et pour la pente de la chaussée, $\frac{1}{72}\ 62^m,36 = 0^m,866$. La hauteur du sommet de la chaussée au-dessus du plan des naissances est égale à la longueur formée par la flèche de l'arche du milieu, l'épaisseur adoptée dans la construction et la hauteur que nous supposons équivalente à 0^m,74 : en déduisant de cette somme la pente 0^m,866, et la profondeur 0^m,974 à laquelle les naissances ont été placées au-dessous de l'étiage, nous aurons la différence de niveau des

abords du pont et des naissances relevées à la hauteur de l'étiage, égale à $12^m,219 = Y_1$. L'élévation actuelle du sommet de l'intrados de l'arche du milieu au-dessus de l'étiage est d'ailleurs $11^m,37 - 0^m,974 = 10^m,396$, tandis que l'élévation des autres arches est moindre de $0^m,487$. Il importe que la solution cherchée donne une flèche peu différente de $10^m,396$, afin que le débouché ne soit pas diminué et que la navigation puisse se faire avec la même facilité.

Soient donc $g = 18^m,1867$; $Y_1 = 12^m,219$; $h = 0^m,60$, d'où $\frac{g}{Y_1} = 1,4884$. On déduit de ces données, par la Table III, $f = 10^m,301$; ce dernier nombre n'est inférieur à $10^m,396$ que de $0^m,095$, et il excède ceux qui répondent au niveau du sommet de l'intrados des arches latérales de $0^m,392$. En poursuivant le calcul, on trouve

$$h'' = 1^m,9104; \quad e = 1^m,3104; \quad \mu_0 = 57^m,052;$$
$$\mu_1 = 68^m,204; \quad \frac{V}{\lambda} = 89^{m.q},372.$$

Dans cette solution, les pressions sont un tant soit peu moindres que dans la précédente, et, quoique l'inégalité des arches ne permette pas de comparer directement les sommes des surfaces $\frac{V}{\lambda}$ des deux profils, notre solution aurait évidemment présenté une économie notable des matériaux des voûtes, indépendamment des avantages qui se rattachent à l'horizontalité de la chaussée et à l'élévation des naissances, et cela sans que le niveau des abords ait été changé.

Pont de Neuilly, sur la Seine.

Le pont de Neuilly, construit par Perronet, est formé de cinq arches terminées du côté des têtes par des voussures qui donnent à l'ensemble de la construction un caractère de hardiesse fort remarquable. Nous n'aurons point égard à ces voussures, qui exigeraient une théorie à part, et nous appliquerons nos formules comme s'il s'agissait d'intrados purement cylindriques. A cela

près, les arches sont en *anse de panier* surbaissée au quart; leur ouverture est de $38^m,98$, la même que celle du pont de Mantes. L'épaisseur des voûtes à la clef est de $1^m,624$, et la hauteur moyenne de charge h peut être évaluée approximativement à $1^m,15$.

Quant aux pierres employées à la confection des voussoirs, elles sont de provenances diverses (*); toutefois leur qualité ne paraît pas devoir être estimée beaucoup au-dessous de celle des meilleures pierres de Saillancourt.

Soient données

$$g = 19^m,490;\quad f = 9^m,745;\quad h = 1^m,15,\qquad \text{d'où } \frac{g}{f} = 2;$$

on aura, par la Table III, $\frac{f}{Y_1} = 0,89759$, d'où $Y_1 = 10^m,857$; puis par les formules (x), $h'' = 1^m,112$; $e = -0^m,038$.

La valeur négative de e que nous rencontrons ici, et déduite de la relation $e = h'' - h$, montre que la donnée h est incompatible avec les autres. Il est visible, en effet, qu'en diminuant h, la valeur de e deviendrait positive, mais sans pouvoir dépasser la limite $1^m,112$, ni même l'atteindre tout à fait en faisant $h = 0$.

Nous allons changer les données, en conservant cependant la demi-ouverture g, et nous astreignant à conserver également l'ordonnée Y_1 des naissances : pour calculer cette ordonnée, nous ferons la somme des trois quantités

Charge approximative...............	$1^m,15$
Épaisseur à la clef adoptée...........	1 ,624
Flèche adoptée.....................	9 ,745

d'où

Ordonnée des naissances........ $Y_1 = 12^m,519$

(*) On trouve dans une Note jointe au *Mémoire* de Perronet *sur l'épaisseur des piles et la courbure des voûtes*, le résultat d'expériences qu'il a faites sur les pierres de Saillancourt employées par lui à la construction du pont de Neuilly. L'habile ingénieur paraît avoir fait usage des hauteurs de charge à la place des pressions par unité de surface; il dit en effet qu'il faudrait, pour opérer la rupture de la pierre en question, la charger *du poids d'une colonne de 1580 pieds de hauteur de la même pierre*. Ce nombre, ramené aux nouvelles mesures, donne $513^m,2$, résultat inférieur à celui que fournit notre tableau pour les pierres de Saillancourt 1re qualité.

Soient donc

$$g = 19^m,490; \quad Y_1 = 12^m,519; \quad h = 0^m,55,$$

d'où

$$\frac{g}{Y_1} = 1,5568;$$

on en déduit, par la Table III, $f = 10^m,731$. Ce nombre, comparé à la donnée primitive, répond à une surélévation du sommet de l'intrados d'un mètre à très-peu près : le niveau des naissances restant d'ailleurs le même qu'auparavant, il est clair que la nouvelle flèche sera plus favorable à la navigation et à l'écoulement des eaux que celle adoptée par Perronet. Il reste à voir si les avantages de la nouvelle solution se maintiendront dans les éléments qu'il nous reste à déterminer. Or, en poursuivant les calculs, on trouve

$$h'' = 1^m,7820; \quad e = 1^m,2320; \quad \mu_0 = 63^m,689;$$

$$\mu_1 = 75^m,224; \quad \frac{V}{\lambda} = 92^{m.q},67,$$

puis

$$\varepsilon_0 = 1^m,2380.$$

Cette valeur de l'épaisseur réelle à la clef comparée à celle réalisée par Perronet présente une réduction de $0^m,386$ ou d'à peu près un quart. Quant à la valeur de μ_1, elle répond à $\frac{1}{6,8}$ ou $\frac{1}{7}$ environ de la résistance absolue 513 mètres déterminée par Perronet : pour ne faire travailler la pierre qu'au $\frac{1}{10}$, il faudrait employer la roche de Châtillon par exemple, dont la résistance absolue est représentée par 742 mètres. La valeur de μ_1 est loin d'atteindre la limite indiquée par Navier; mais sans recourir à l'autorité de cet auteur, il est admissible que la solution déduite de notre théorie aurait pu être réalisée avec des matériaux un peu plus résistants que ceux employés, et, à la rigueur, avec ces derniers, si l'on se rappelle que le coefficient $\frac{1}{10}$ est proposé pour des constructions qui ne jouissent pas d'un degré de stabilité comparable à celui que nous pouvons atteindre. Les avantages de notre

solution sont assez manifestes pour que nous ne croyons pas devoir insister davantage.

Pont d'Orléans, sur la Loire.

Ce pont, construit sur le projet de M. Hupeau, est composé de neuf arches inégales, dont les naissances sont établies à $0^m,325$ au-dessus des basses eaux. L'arche du milieu a $32^m,484$ d'ouverture et $9^m,095$ de flèche; l'épaisseur à la clef est de $2^m,111$ pour cette arche. Quant aux autres arches, leurs dimensions sont successivement décroissantes. Les arches des culées ont $29^m,885$ d'ouverture, $8^m,121$ de flèche et $1^m,787$ d'épaisseur à la clef. La longueur totale du pont entre les culées est de $334^m,839$; quatre des piles ont une largeur de $5^m,522$; la largeur des quatre autres est de $5^m,847$, ce qui donne, pour la largeur totale des huit piles, $45^m,476$; en sorte que le débouché des neuf arches est de $279^m,363$. La pente longitudinale du pavé du pont a été réglée de part et d'autre à $\frac{1}{108}$, d'où il suit que la différence de niveau de la chaussée au milieu du pont et à ses abords s'élève à $\frac{1}{108}\,\frac{324^m,839}{2} = 1^m,504$. La hauteur de charge h peut être évaluée approximativement à $0^m,85$.

Nous ferons remarquer qu'en construisant le pont d'Orléans, l'on a cru convenable de réserver, dans le massif, des cavités qui ont pour effet de diminuer la charge. Cette manière de décharger les voûtes nous paraît vicieuse dans l'application que l'on en a faite jusqu'ici. Pour concilier de semblables dispositions avec les exigences de la théorie, il faudrait que les voûtes des arches présentassent des solutions de continuité dans leur courbure, aux endroits où les naissances des voûtes en décharge s'appuient sur les reins de la voûte principale. Nous ferons abstraction de ces particularités dans ce qui va suivre, en supposant le massif plein.

Nous nous dispenserons d'étudier en particulier l'arche du milieu, et nous examinerons s'il n'aurait pas été possible d'établir à Orléans un pont horizontal formé d'arches égales et en même

nombre, sans changer les niveaux des abords du pont et des naissances. En conservant la largeur totale des piles, on a pour chacune d'elles $5^m,6845$, moyenne des largeurs inégales qui ont été adoptées dans la construction. L'ouverture d'une arche devient égale à $\frac{1}{9}\ 279^m,363 = 31^m,0403$. L'ordonnée des naissances, pour l'arche du milieu, est égale à $9^m,095 + 2^m,111 + 0^m,85 = 12^m,056$; déduisant la différence de niveau $1^m,504$, nous aurons $10^m,552$ pour ordonnée des naissances, dans le pont horizontal, en conservant le niveau des abords. Nous réduirons la hauteur h en la prenant, comme dans l'exemple précédent, égale à $0^m,55$. De cette manière nous aurons d'abord les données suivantes :

$$g = 15^m,5202; \quad Y_1 = 10^m,552; \quad h = 0^m,55,$$

d'où

$$\frac{g}{Y_1} = 1,47085.$$

On en tire, au moyen de la Table III, $f = 8^m,8542$, ce qui donne lieu au surbaissement $\frac{1}{3,5057}$. La flèche que nous déterminons ici est moindre que celle de l'arche du milieu du pont d'Orléans de $0^m,241$, et plus grande de $0^m,733$ que celle des arches extrêmes. En ayant égard à ces différences, et observant que nos intrados sont plus convexes vers les reins que ceux pratiqués jusqu'ici, on aperçoit, sans calcul, que le débouché correspondant à la valeur de f que nous venons de déterminer, excède celui que présentent les arches du pont d'Orléans. Nous devons cependant constater que la réduction $0^m,241$ de la montée de l'arche dite *marinière*, bien qu'elle soit assez faible, apporterait peut-être quelques obstacles à la navigation par les hautes eaux. En poursuivant les calculs, on trouve

$$h'' = 1^m,6909; \quad e = 1^m,1409; \quad \mu_0 = 48^m,853;$$

$$\mu_1 = 58^m,447; \quad \frac{\pi}{\lambda} = 66^{m-1},682,$$

puis

$$s_0 = 1^m,1478.$$

L'épaisseur à la clef que nous obtenons est de beaucoup moindre que celles adoptées dans la construction, et qui varient de $2^m,111$ à $1^m,787$; la réduction dans les épaisseurs varie par conséquent de $\frac{1}{2,2}$ à $\frac{1}{2,8}$. La valeur de μ_1 répond très-sensiblement au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité. Nous ignorons quelle était la résistance des pierres de Mignier et de Beaugency qui ont été employées; celles de Beaugency sont signalées comme dures. Malgré le défaut d'indications plus précises, nous sommes porté à regarder la solution précédente comme offrant d'assez grands avantages sur celle adoptée.

Pont de Gignac, sur l'Hérault (arche du milieu).

L'arche du milieu de ce pont est surbaissée au tiers, et son ouverture est de $48^m,70$, d'où

$$g = 24^m,35; \quad f = 16^m,2333, \quad \text{et } \frac{g}{f} = 1,5.$$

En admettant ces données, on trouve par la Table III, $Y_1 = 22^m,160$, d'où $Y_1 - f$ ou $y''_1 - f = 5^m,927$. Or, on voit qu'en supposant par exemple e compris entre 2 mètres et 3 mètres, h serait compris entre $3^m,9$ et $2^m,9$: ces valeurs de h étant de beaucoup supérieures à la hauteur de charge strictement nécessaire, on voit qu'en admettant la valeur donnée de f, on serait conduit à surcharger la voûte d'une masse énorme de matériaux tout à fait inutile. L'inconvénient que nous rencontrons ici tient au surbaissement $\frac{1}{3}$, qui conduira toujours à de pareils résultats dans les arches de grande ouverture. Mais nous avons la ressource de diminuer la flèche, ce qui nécessite simplement une élévation égale du sommet des piles ou des naissances. Pour fixer les idées, nous substituerons aux données primitives les suivantes :

$$g = 24^m,35; \; f = 13^m,25; \; \mu_1 = 100^m,00, \text{ d'où } \frac{g}{f} = 1,8377.$$

A l'aide de la Table III, on en déduit $Y_1 = 15^m,3575$; puis, en achevant les calculs, il vient

$$\mu_0 = 85^m,861; \quad e = 1^m,3740; \quad h'' = 2^m,1018;$$
$$h = 0^m,7278; \quad \frac{V}{\lambda} = 137^{m\cdot q},40.$$

En prenant μ_1 moindre que 100 mètres, la valeur de e croîtrait et celle de h diminuerait. Nous ne donnons les chiffres précédents que pour montrer l'effet de la variation du surbaissement. Il est clair qu'en consultant certaines convenances locales, on trouverait le moyen de fixer d'une manière moins arbitraire les valeurs de f et de μ_1 ou h.

Pont de Vizille, sur la Romanche.

Ce pont, construit par M. Bouchet, sur la route de Grenoble à Briançon, consiste en une arche unique de $41^m,90$ d'ouverture et de $11^m,69$ de flèche. Nous supposerons la hauteur de charge h égale à $0^m,66$. Les données seront ainsi

$$g = 20^m,95; \quad f = 11^m,69; \quad h = 0^m,66, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,79213.$$

Par la Table III, on en déduit $Y_1 = 13^m,7426$; et, en achevant les calculs,

$$h'' = 2^m,0454; \quad e = 1^m,3854; \quad \mu_0 = 68^m,234;$$
$$\mu_1 = 80^m,826; \quad \frac{V}{\lambda} = 111^{m\cdot q},98,$$

puis $$\varepsilon_0 = 1^m,3926.$$

L'épaisseur adoptée dans la construction est de $1^m,95$; notre solution aurait donc permis une économie de $0^m,557$ sur l'épaisseur des voussoirs, ou de $\frac{1}{3,5}$ de l'épaisseur réalisée. La valeur de μ_1 n'est pas excessive, elle supposerait l'emploi de pierres présentant

la résistance du calcaire de Jaumont 1re qualité, travaillant au $\frac{1}{10}$. La roche douce d'Arcueil employée à Paris offrirait une résistance plus que suffisante.

Le surbaissement du pont de Vizille est $\frac{1}{3,5843}$, et par conséquent assez éloigné de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$; c'est à cette circonstance que nous devons de n'avoir pas rencontré les difficultés relatives aux données, qui se sont présentées dans quelques-uns des exemples précédents.

Pont de Céret, sur le Tech.

Comme presque tous les ponts qui datent de la même époque, le pont de Céret a été construit en plein cintre. Il se compose d'une seule arche de 45 mètres d'ouverture, dont les pieds-droits s'appuient contre des rochers. La forme de plein cintre a tellement exhaussé le sommet de la voûte, que l'on est obligé de franchir des pentes très-rapides pour arriver au milieu du pont. Malgré l'abondance des eaux torrentielles qui descendent des Pyrénées, il n'est guère probable que l'on ait élevé si considérablement le sommet de la voûte dans le but unique d'offrir un grand débouché à l'écoulement des eaux.

En examinant les dessins du pont de Céret, on reconnaît aisément qu'il aurait été possible d'établir à sa place un pont horizontal formé d'une arche en *anse de panier*, et de se passer des fortes rampes qui existent aux abords. Admettons, par exemple, le surbaissement $\frac{1}{3,5}$, qui donne, pour l'ouverture de 45 mètres, une flèche de $12^m,857$. Cette flèche, comparée au rayon $22^m,50$ de l'arche en plein cintre, présente une différence de $9^m,643$ dont on aurait pu abaisser le sommet de l'intrados, en conservant le même plan des naissances; en élevant les naissances d'une fraction de cette quantité, pour ne pas trop réduire la hauteur du débouché, on abaisserait le sommet de l'intrados d'une quantité égale au reste. Dans tous les cas, l'établissement des culées serait

facilité par la présence des rochers contigus. (Voir l'exemple du nº 49.)

Faisons le calcul avec les données suivantes :

$$g = 22^{m},50;\quad f = 12^{m},857;\quad h = 0^{m},65,\quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,75.$$

Nous trouverons, par la Table III, $Y_1 = 15^{m},338$; puis ensuite

$$h'' = 2^{m},4690;\quad e = 1^{m},8190;\quad \mu_0 = 64^{m},854;$$
$$\mu_1 = 78^{m},888;\quad \frac{V}{\lambda} = 143^{m.q},50.$$

La valeur de e n'a rien d'exagéré; celle de μ_1 exigerait dans les matériaux des voussoirs une résistance comprise entre celles de la roche de Châtillon et celle du calcaire de Jaumont 1re qualité. On doit prévoir assez aisément l'effet des variations de f et de h par rapport à e et μ_1, pour que nous n'insistions pas davantage sur ce sujet.

Pont de Tours, sur la Loire.

Ce pont est composé de quinze arches en *anse de panier* surbaissée au tiers, de $24^{m},4$ d'ouverture, ce qui donne $8^{m},1333$ de flèche; les piles ont $4^{m},87$ d'épaisseur.

Avec les données $f = 8^{m},1333$ et $\frac{g}{f} = 1,5$, on trouve, par la Table III, $Y_1 = 11^{m},103$, d'où $Y_1 - f = 2^{m},970$, quantité égale à la somme de l'épaisseur réelle à la clef et de la surcharge h. En prenant h dans les limites usuelles, l'épaisseur serait encore très-considérable pour une assez faible ouverture, et les pressions dans les joints resteraient très-faibles, ce qui impliquerait un emploi peu économique des matériaux. La cause des inconvénients qui se présentent ici est, comme pour le pont de Gignac, dans le surbaissement $\frac{1}{3}$.

Nous pourrions obtenir une solution exempte de pareils inconvénients en diminuant la flèche des arches, ce qui permettrait d'élever les naissances et favoriserait l'écoulement des eaux, sans

que le niveau de la chaussée fût changé; nous irons plus loin. La construction du pont de Tours a été signalée par une suite de désastres paraissant avoir eu pour origine la difficulté de fonder les piles, et la facilité avec laquelle se sont produits les affouillements. Il nous semble qu'en réduisant le nombre des piles et leur largeur, on aurait réduit d'autant les difficultés du travail des fondations, et que, d'un autre côté, la largeur du débouché se trouvant augmentée, les affouillements auraient été moins à redouter. On peut objecter à cette manière de voir, que les conséquences de la chute des arches, par suite de vices de fondation des piles, seraient plus graves que dans le cas d'arches de moindres dimensions; cependant il faut reconnaître que les chances de pareils accidents seraient bien diminuées : en outre, il n'est pas impossible aujourd'hui de s'assurer que des piles établies dans des conditions déterminées pourront résister à des charges données. En nous plaçant à ce point de vue, nous proposerions de composer le pont de treize arches, et de donner aux piles 4 mètres seulement de largeur. Le débouché des quinze arches est de 366 mètres: la somme des épaisseurs des piles est de $68^m,18$, ce qui donne une longueur totale entre les culées de $434^m,18$. De ce nombre déduisons 48 mètres, épaisseur totale des douze piles, et nous aurons pour le nouveau débouché $386^m,18$, nombre qui excède celui du pont de Tours de $20^m,18$, et dont le $\frac{1}{13}$ est $29^m,70615$. Telles seraient les dimensions des ouvertures des arches. Au lieu de nous donner la flèche, nous admettrons la condition que l'ordonnée des naissances reste la même : or, d'après les planches de l'ouvrage de Gauthey, cette ordonnée peut être évaluée à environ $10^m,80$. Soient donc

$$g = 14^m,8531; \quad Y_1 = 10^m,80; \quad h = 0^m,65;$$

on trouve la solution suivante :

$$f = 8^m,8174; \quad h'' = 1^m,9722; \quad e = 1^m,3222;$$

$$\mu_0 = 44^m,169; \quad \mu_1 = 53^m,837; \quad \frac{V}{\lambda_r} = 71^{m.q},182.$$

On observera que la flèche excède celle adoptée dans la construction, de $0^m,684$; elle est donc plus favorable à la navigation et à l'écoulement des eaux. L'épaisseur ne présente rien d'exagéré, et la valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{10,8}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité. Si l'on admet que les matériaux présentent une résistance même un peu inférieure à cette dernière, la solution que nous venons d'obtenir pourra être regardée comme préférable au projet qui a servi de base à l'établissement du pont de Tours.

Quant aux piles, les nombres précédents donnent $\varepsilon_1 = 1^m,376$, dont le double est $2^m,752$: or cette quantité est de beaucoup inférieure à la largeur 4 mètres des piles; les matériaux intérieurs des piles n'auront donc pas besoin de présenter une résistance aussi grande que celle des voussoirs, les parements extérieurs seront seuls assujettis à la condition d'être aussi résistants que les voussoirs sur une profondeur égale à l'épaisseur de ceux-ci, et encore suffira-t-il qu'il en soit ainsi vers la partie supérieure des piles.

Pont des Chavannes, à Chalon-sur-Saône.

Ce pont, construit par Gauthey, est composé de sept arches surbaissées au tiers, ayant 13 mètres d'ouverture, et par conséquent $4^m,3333$ de flèche. L'épaisseur des piles est de $4^m,55$. Si nous admettons que la charge au-dessus de la clef soit $0^m,65$, les données seront

$$g = 6^m,5; \quad f = 4^m,3333; \quad h = 0^m,65, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,5,$$

et l'on obtiendra la solution suivante :

$$Y_1 = 5^m,9155; \quad h'' = 1^m,5681; \quad e = 0^m,9181;$$
$$\mu_0 = 18^m,980; \quad \mu_1 = 23^m,884; \quad \frac{V}{\lambda} = 21^{mq},928.$$

L'épaisseur est un peu forte pour des arches d'aussi faible portée; la valeur de μ_1 est en même temps très-faible : les pierres de la moindre qualité présenteraient une résistance suffisante. Construites avec ces valeurs, les arches pécheraient plutôt, si cela était possible, par un excès de stabilité que par l'excès contraire.

Si le pont était à reconstruire, nous ne nous arrèterions pas aux chiffres que nous venons de trouver. On lit, en effet, dans l'ouvrage de Gauthey, page 101 : « La disposition du terrain ne permettant pas d'élever suffisamment la surface du pavé du pont, les grandes eaux montent jusqu'à la clef des arches; et afin de compenser la diminution de largeur que leur débouché éprouve à mesure qu'elles s'élèvent, on a pratiqué dans la partie supérieure des piles des ouvertures ovales de $2^m,6$ de largeur. » En consultant les planches qui accompagnent le même ouvrage, on trouve que la hauteur du pavé au-dessus des naissances est de $6^m,30$ environ.

Pour obvier à l'inconvénient signalé par Gauthey, il faudrait augmenter le débouché, ce qui peut se faire de diverses manières : par exemple, en réduisant l'épaisseur des piles. Réduisons cette épaisseur à $3^m,50$, les six piles donneront un accroissement de débouché égal à $6.1^m,05 = 6^m,3$, lequel, réparti également entre les sept arches, donne pour chacune un accroissement d'ouverture égal à $0^m,9$: les nouvelles dimensions des ouvertures seront de la sorte $13^m,90$. Nous pourrions aussi élever les naissances; mais conservons leur position et celle du niveau de la chaussée : l'ordonnée des naissances pourra être prise, d'après les dessins de Gauthey, égale à $6^m,30$ environ. En partant des nouvelles données

$$g = 6^m,95; \quad Y_1 = 6^m,30; \quad h = 0^m,65,$$

on trouvera la solution suivante :

$$f = 4^m,6248; \quad h'' = 1^m,6593; \quad e = 1^m,0093;$$
$$\mu_0 = 19^m,621; \quad \mu_1 = 24^m,872; \quad \frac{V}{\lambda} = 25^{m.q},104.$$

Indépendamment de l'accroissement du débouché dû à la réduction de la largeur des piles, la flèche que nous trouvons ici, et qui excède celle adoptée de $0^m,291$, détermine un nouvel accroissement du débouché; et l'on aperçoit, sans calcul, que l'accroissement total excède de beaucoup celui qui est dû aux ouvertures pratiquées au sommet des piles. Les considérations présentées dans l'exemple précédent, au sujet de la largeur des piles, sont applicables ici. L'épaisseur à la clef est très-admissible, et la valeur de μ_1 excède à peine celle trouvée dans la première solution; en sorte que les pierres les moins résistantes pourraient encore être employées. La surface $\frac{V}{\lambda}$ du profil de la demi-arche et de son massif est augmentée de $\frac{1}{7}$ environ, mais cet accroissement est en partie compensé par la diminution de largeur des piles.

Nous ne donnons pas la solution précédente comme étant la meilleure; mais elle suffit pour montrer la facilité avec laquelle il devient possible de satisfaire aux diverses conditions du problème en substituant à un surbaissement trop voisin de $\frac{1}{3}$ un autre qui soit moins éloigné de $\frac{1}{4}$.

Pont de Neuville, sur l'Ain.

Ce pont, construit sur le projet de M. Aubry, est formé de deux arches de $29^m,20$ d'ouverture. D'après les planches de Gauthey, la flèche paraît être égale à $\frac{1}{3,4}$ de l'ouverture. Soient

$$g = 14^m,60; \quad f = 8^m,5882; \quad h = 0^m,65,$$

on aura la solution

$$Y_1 = 10^m,4491; \quad h' = 1^m,8523; \quad e = 1^m,2023;$$
$$\mu_0 = 45^m,431; \quad \mu_1 = 54^m,795; \quad \frac{V}{\lambda} = 65^{m.q},879.$$

Ces nombres sont réalisables, si l'on dispose de matériaux dont la résistance ne soit pas notablement inférieure à la résistance

de la pierre de Saillancourt 1re qualité. Le dessin que nous avons sous les yeux ne nous permet pas de comparer l'épaisseur adoptée dans la construction avec celle que nous venons de déterminer.

Pont de Roanne, sur la Loire.

Ce pont est formé de sept arches surbaissées au tiers, de $23^m,40$ d'ouverture, et, par conséquent, de $7^m,80$ de flèche. En admettant ces données, on aurait $y''_1 - f$ ou $\varepsilon_0 + h = 2^m,8478$; de sorte qu'en prenant h dans les limites habituelles, l'épaisseur ε_0 excéderait 2 mètres, et la valeur de μ_1 serait assez faible. Comme précédemment, ces résultats tiennent à ce que le surbaissement est égal à $\frac{1}{3}$.

Le niveau de la chaussée paraît, d'après les dessins de Gauthey, supérieur au sommet de l'intrados d'environ $1^m,7$. En conservant le niveau de la chaussée, nous nous proposerons de réduire la flèche en nous astreignant à la condition que l'ordonnée du sommet de l'intrados n'excède pas $1^m,7$. L'élévation des naissances qui en résultera favorisera l'écoulement des eaux. Prenons par exemple pour nouvelles données

$$g = 11^m,70; \quad f = 7^m,00; \quad h = 0^m,65,$$

il viendra

$$Y_1 = 8^m,6242; \quad h'' = 1^m,6171; \quad e = 0^m,9671;$$
$$\mu_0 = 38^m,399; \quad \mu_1 = 46^m,021; \quad \frac{V}{\lambda} = 44^{mq},505,$$

puis $\varepsilon_0 = 0^m,9742$. L'ordonnée du sommet de l'intrados réel est $\varepsilon_0 + h = 1^m,6242$, quantité un peu moindre que $1^m,7$: ainsi notre solution exhausse le sommet des arches de $0^m,076$. Quant aux naissances, leur ordonnée se trouve être, au pont de Roanne, égale à $1^m,7 + 7^m,8 = 9^m,5$: or nous trouvons $Y_1 = 8^m,624$; les naissances sont donc exhaussées de $0^m,876$ dans notre solu-

tion. La valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{12,6}$ de la résistance absolue de la pierre de Saillancourt 1re qualité, et à $\frac{1}{9,5}$ environ de celle de la pierre ferme de Conflans. Les nombres que nous venons d'obtenir seraient réalisables; peut-être même l'accroissement de débouché dû à l'exhaussement du sommet et des naissances de l'intrados eût-il suffi pour éviter la ruine du pont de Roanne survenue pendant la terrible inondation qui a désolé les populations riveraines de la Loire, dans l'hiver de 1846-47. Mais on aurait évité plus sûrement les effets désastreux des grandes crues, en construisant les arches de ce pont dans le système de celles que nous nommons *arches incomplètes.*

Pont de Frouards, sur la Moselle.

Ce pont, construit par M. Lecreulx, est composé de sept arches dont le surbaissement est compris « entre le tiers et le quart, » dit Gauthey, et dont les ouvertures sont de $19^m,5$. D'après les dessins de ce dernier ingénieur, le surbaissement peut être évalué à $\frac{1}{3,64}$, ou la flèche à $5^m,3571$. En partant des données

$$g = 9^m,75; \qquad f = 5^m,3571, \qquad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,82,$$

on trouverait $y'_1 - f$ ou $\varepsilon_0 + h = 0^m,8851$; en sorte que la somme de l'épaisseur à la clef et de la hauteur de charge h n'atteindrait pas seulement $0^m,9$. La moindre valeur admissible que l'on attribuerait à h laisserait pour ε_0 une valeur inadmissible en raison de sa petitesse, et à laquelle répondraient d'énormes pressions dans les joints. La cause de ces inconvénients tient à ce que le surbaissement est trop voisin de $\frac{1}{4}$: ainsi les données doivent être modifiées. En conservant l'ouverture des arches, admettons la condition que la différence de niveau des naissances et de la chaussée, qui paraît être de $7^m,35$ environ, d'après les dessins

de Gauthey, reste la même, et attribuons comme dans d'autres exemples, à la hauteur h, la valeur $0^m,65$; les données seront

$$g = 9^m,75; \quad Y_1 = 7^m,35; \quad h = 0^m,65;$$

au moyen de quoi, l'on aura la solution suivante :

$$f = 5^m,9073; \quad h'' = 1^m,4369; \quad e = 0^m,7869;$$
$$\mu_0 = 34^m,191; \quad \mu_1 = 40^m,605; \quad \frac{V}{\lambda} = 31^{m.q},950,$$

puis $e_0 = 0^m,7928$.

Cette solution est plus favorable sous le rapport du débouché et de la facilité du passage des bateaux, que le projet réalisé par M. Lecreulx, puisque la flèche excède celle du pont de Frouards d'environ $0^m,55$; l'épaisseur à la clef est très-admissible, et la résistance mesurée par μ_1 est $\frac{1}{10,6}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 2e qualité, et $\frac{1}{10,7}$ de celle de la pierre ferme de Conflans. Le surbaissement auquel répondent les valeurs de g et de f est $\frac{1}{3,3009}$.

Pont des Tuileries, à Paris, sur la Seine.

Ce pont, construit sur les dessins de Mansard, est formé de cinq arches inégales : l'ouverture de l'arche du milieu est de $23^m,5$; celles des arches latérales sont de $22^m,2$ et $21^m,0$. La chaussée du pont forme deux rampes, et les naissances des arches sont situées à des niveaux différents. Les dimensions des flèches ne sont pas données dans Gauthey, et il est difficile de les obtenir à l'aide des planches de son ouvrage. Nous allons examiner s'il n'aurait pas été possible d'établir un pont horizontal composé d'arches égales, en satisfaisant principalement à la condition que le sommet des arches ne fût pas sensiblement moins élevé que celui de l'arche du milieu du pont des Tuileries, le niveau des abords restant le

même. La différence de niveau des abords et du sommet de l'arche du milieu paraît être d'environ $1^m,7$ à $1^m,8$, d'après les dessins de Gauthey. La somme des cinq ouvertures est $109^m,9$, dont le cinquième est $21^m,98$; essayons le surbaissement $\frac{1}{3,25}$, la flèche sera de $6^m,7632$, et en prenant $h = 0^m,65$, les données seront :

$$g = 10^m,99; \quad f = 6^m,7632; \quad h = 0^m,65.$$

A l'aide de ces nombres, on obtient la solution

$$Y_1 = 8^m,5233; \quad h'' = 1^m,7498; \quad e = 1^m,0998;$$
$$\mu_0 = 33^m,020; \quad \mu_1 = 40^m,485; \quad \frac{V}{\lambda} = 44^{m}{}^{q},524,$$

puis $\varepsilon_0 = 1^m,1102$: il s'ensuit $\varepsilon_0 + h = 1^m,7602$. Ce nombre est compris entre les limites $1^m,7$ et $1^m,8$ que nous ont fournies les dessins de Gauthey. Autant qu'on en peut juger d'après les mêmes dessins, la position des naissances donnée par la valeur de Y_1 serait à peu près au niveau de celles de l'arche du milieu du pont des Tuileries. L'épaisseur que nous venons de trouver est très-admissible, et la valeur de μ_1 est compatible avec l'emploi des pierres de qualité inférieure, telles que celles de Saillancourt 2e qualité et de Conflans. En supposant que les dessins de Gauthey ne nous aient point induit en erreur, on voit que notre solution présente des avantages marqués sur celle qui a été réalisée.

Pont de Dôle, sur le Doubs.

Ce pont, construit par M. Guéret, est composé de sept arches inégales surbaissées au tiers, dont la plus grande a $18^m,80$ d'ouverture, et, par conséquent, $6^m,2667$ de flèche. Les piles ont de $3^m,25$ à $3^m,50$ d'épaisseur. On trouve dans le Tableau général des ponts de Gauthey, que le débouché total est de $122^m,40$. D'après le dessin que donne cet auteur, on peut estimer qu'il existe une différence de niveau de $7^m,0$ à $7^m,10$ entre le niveau de la

chaussée aux abords du pont et les naissances : soit $7^m,05$. Ce nombre, comparé à la flèche de l'arche du milieu, donne $0^m,7833$ pour la différence de niveau entre celui des abords du pont et le sommet de cette même arche. Proposons-nous de déterminer les dimensions principales d'un pont horizontal formé de sept arches égales, dans lequel on conservera le niveau des abords et celui des naissances, en augmentant d'ailleurs le débouché par la réduction de la largeur des piles. La largeur moyenne de celles-ci étant de $3^m,375$, la somme pour les six piles est $20^m,25$; nous pouvons, sans hésiter, réduire la largeur de chacune d'elles à 3 mètres, ce qui augmentera le débouché de $2^m,25$, et élèvera la somme des ouvertures à $124^m,65$, dimension dont le $\frac{1}{7}$ est $17^m,807$. Prenons donc pour données

$$g = 8^m,9035; \quad Y_1 = 7^m,05; \quad h = 0^m,65;$$

nous obtiendrons la solution que voici :

$$f = 5^m,5403; \quad h' = 1^m,5019; \quad e = 0^m,8519;$$
$$\mu_0 = 29^m,065; \quad \mu_1 = 35^m,149; \quad \frac{V}{\lambda} = 29^{m.q},943,$$

puis $\varepsilon_1 = 0^m,8597$.

Cette solution serait réalisable avec les pierres à bâtir les moins résistantes; mais elle peut pécher en ce que le sommet des arches est ici moins élevé qu'au milieu du pont de Dôle de $0^m,726$, différence des valeurs de f. Une telle réduction de la flèche peut être nuisible à la navigation et dangereuse dans le cas de grandes crues. On diminuerait ces inconvénients en élevant les naissances, ce qui aurait pour effet de diminuer l'épaisseur à clef et d'exiger l'emploi de matériaux plus résistants; mais il est clair que l'on ne parviendrait pas pratiquement à réduire l'ordonnée du sommet de l'intrados à $0^m,783$.

Pont de Lavaur, sur l'Agoût.

Ce pont, qui date seulement de 1775, est composé d'une grande arche *en anse de panier,* approchant du plein cintre, dont l'ouverture est de 48^{m},7, la même que celle de l'arche du milieu du pont de Gignac. L'épaisseur de la voûte à la clef est de près de 3^{m},25.

« Cette grande épaisseur, dit Gauthey, est une des causes des dégradations qui se sont manifestées à ce pont. Les accidents ne proviennent point, d'ailleurs, d'un manque de force de la part des culées, qui sont très-épaisses. » A cette cause, on peut, selon nous, ajouter la grande épaisseur de la surcharge.

Nous avons vu déjà que, dans le cas des grandes arches, le surbaissement $\frac{1}{3}$ entraîne des inconvénients, et que le surbaissement $\frac{1}{4}$ exige des matériaux très-résistants et de faibles épaisseurs à la clef. Les surbaissements voisins de $\frac{1}{3,5}$ réussissent bien dans les arches d'assez grandes dimensions : nous adopterons ici un surbaissement un peu plus voisin de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3,6}$; et, en prenant, comme plus haut, 0^{m},65 pour hauteur de la surcharge, nous aurons les données suivantes :

$$g = 24^{m},35; \quad f = 13^{m},5278; \quad h = 0^{m},65.$$

Avec ces données, on obtient la solution :

$$Y_1 = 15^{m},8628; \quad h'' = 2^{m},3260; \quad e = 1^{m},6760;$$
$$\mu_0 = 75^{m},222; \quad \mu_1 = 89^{m},841; \quad \frac{V}{\lambda} = 150^{m\cdot q},57,$$

puis $\varepsilon_0 = 1^{m},6850$.

La flèche adoptée dans la construction paraît être de 21 à 22 mètres. La réduction que nous lui faisons subir exigerait un exhaussement des naissances d'au moins 7^{m},5, si le sommet de

l'intrados devait être maintenu à la même hauteur. En l'absence de renseignements suffisamment exacts sur le niveau de la chaussée et la nécessité de le maintenir, ou la convenance qu'il aurait pu y avoir de l'abaisser, nous ne discuterons pas la valeur de Y_1. Nous ferons remarquer que l'épaisseur réelle à la clef que nous obtenons excède, de quelques centimètres seulement, la moitié de celle qui a été adoptée. Quant à la valeur de μ_1, elle montre que les voussoirs seraient soumis à des pressions pouvant atteindre le $\frac{1}{12}$ de la résistance absolue de la roche d'Arcueil, ou le $\frac{1}{9}$ de celle du calcaire de Jaumont 1re qualité.

Pont d'Ingersheim, sur le Fecht.

Ce pont a été construit en 1773 par M. Clinchamp, ingénieur militaire. Il se compose de trois arches *en anse de panier* dont le surbaissement est entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$, et dont les ouvertures sont de $15^m,3$ et $18^m,3$. D'après le dessin de Gauthey, la chaussée serait disposée en pentes très-douces de part et d'autre du milieu du pont, et les naissances seraient à $5^m,4$ environ au-dessous du niveau de la chaussée aux abords du pont.

Si l'on fait abstraction de la légère pente pour l'arche du milieu, et que l'on parte du surbaissement $\frac{1}{4,5}$ et de l'ouverture $18^m,3$ comme données, d'où résulte $f = 4^m,0667$, on trouvera $\varepsilon_1 + h = 0^m,2909$, quantité évidemment inadmissible dans la pratique.

Si l'on se propose l'établissement d'un pont horizontal de même débouché et formé de trois arches égales, et que l'on ajoute la condition que la différence de niveau des abords du pont et des naissances soit de $5^m,4$, les données seront d'abord

$$g = 8^m,15; \quad Y_1 = 5^m,40,$$

et l'on trouvera $f = 4^m,5762$; $\varepsilon_1 + h = 0^m,8238$. Il est évident qu'en attribuant à h une valeur comprise dans les limites ordi-

naires, l'épaisseur à la clef restera encore très-petite et répondra à des pressions très-considérables dans les joints. Il suffirait d'élever les abords de quelques décimètres, pour obtenir une solution admissible en pratique. Si les exigences locales ne le permettent pas, il conviendra de renoncer aux arches *en anse de panier*, et de recourir à l'emploi des arches incomplètes. Au reste, il semble que l'ingénieur a fait quelque chose d'analogue, car en examinant le dessin du pont d'Ingersheim dans l'ouvrage de Gauthey, on reconnaît que l'intrados est formé d'un arc de cercle de grand rayon raccordé avec les pieds-droits, au moyen de deux arcs de rayons beaucoup plus petits. En prolongeant le tracé de l'arc principal jusqu'aux pieds-droits, on aurait un intrados circulaire très-peu différent, au fond; de celui dont il s'agit. La direction des plans de joint dans le voisinage des naissances peut seule établir une différence marquée entre les deux genres d'intrados : ne sachant pas au juste quelle est cette direction, il nous est impossible de dire si les arches du pont d'Ingersheim appartiennent à la classe des arches *en anse de panier* ou à celle des arches *en arc de cercle.*

Pont de Vieille-Brioude, sur l'Allier.

On lit dans Gauthey : « Ce pont a été bâti en 1454, par les entrepreneurs Grenier et Estone, aux frais de la dame du lieu. Il est composé d'une seule arche *en arc de cercle* de 54^{m},2 d'ouverture, et de 21 mètres de flèche. C'est la plus grande de toutes les arches qui existent en France, et probablement en Europe; elle n'a que 4^{m},9 de largeur, ainsi que les levées qui y aboutissent.

« La voûte est formée de deux rangs de voussoirs posés l'un sur l'autre, sans que l'on ait pratiqué entre eux presque aucune liaison; l'un est en pierres volcaniques, et l'autre en grès très-dur. Les pierres n'ont que 0^{m},20 à 0^{m},25 d'épaisseur sur 0^{m},65 au plus de longueur de coupe. Le pont est fondé solidement sur deux rochers qui s'élèvent au-dessus des basses eaux. »

Il est moins probable que la grandeur de la flèche ait été

fixée par la nécessité de donner de la hauteur au débouché, que par l'obligation où croyaient être beaucoup de constructeurs des siècles passés d'éviter le plus possible les formes éloignées du plein cintre. La grande hauteur de l'arche a nécessité l'établissement de rampes très-rapides qui se prolongent à une assez grande distance des deux côtés du pont. Le sommet du pavé est, d'après le dessin de Gauthey, élevé d'environ $24^{m},6$ au-dessus des naissances.

Nous supposerons qu'il s'agisse de construire un pont horizontal, à une seule arche *en anse de panier* de $54^{m},2$ d'ouverture, et que l'on ait à utiliser la résistance de matériaux du genre de ceux qui ont été employés au pont de Vieille-Brioude. (Les constructeurs de ce pont ont dû s'imposer une telle condition d'économie, puisque les frais ont été supportés par la *dame du lieu* et non pas par une province ou partie de province.) Nous admettrons un surbaissement voisin de $\frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{3,8}$; et une hauteur $0^{m},65$ de charge au-dessus de la clef. De cette manière, les données seront

$$g = 27^{m},10; \quad f = 14^{m},2633; \quad h = 0^{m},65.$$

On en déduit

$$Y_1 = 16^{m},2532; \quad h'' = \quad 1^{m},9853; \quad e = 1^{m},3353;$$
$$\mu_0 = 98^{m},976; \quad \mu_1 = 114^{m},116; \quad \frac{V}{\lambda} = 151^{m.q},38,$$

puis $\varepsilon_0 = 1^{m},3399$. La présence des deux rochers dont parle Gauthey, permettrait d'appliquer ici les notions que nous avons exposées au n° 49 sur l'établissement des culées. Le profil d'une culée serait un trapèze rectangle dont les bases supérieure et inférieure de niveau respectivement avec le sommet de l'extrados et les naissances, auraient des dimensions qui excèdent $\frac{0^{m},65}{0,76}$ et $\frac{16^{m},25}{0,76}$ ou $0^{m},9$ et $21^{m},4$ environ. Il est clair que la partie des rochers s'élevant au-dessus du plan des naissances serait comprise dans

la culée déterminée par ce profil, moyennant un raccordement convenable avec les maçonneries.

En supposant que la flèche trouvée laisse un débouché suffisant, on voit que l'ordonnée 16m,25 du plan des naissances permettrait un abaissement du sommet du pavé égal à 8m,35. On observera que l'épaisseur réelle à la clef 1m,34 excède peu la somme des épaisseurs des deux rangs de voussoirs, laquelle serait 1m,30 au plus, selon Gauthey. Enfin la valeur de μ, est très-loin d'atteindre le $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres volcaniques et des grès durs; elle répond à $\frac{1}{9,5}$ de celle de la roche d'Arcueil.

La solution que nous venons de trouver, bien que s'écartant un peu des habitudes actuelles des ingénieurs, nous parait très-admissible dans les conditions d'économie que nous nous sommes imposées. Hors de ces conditions, il eût été facile, en augmentant la flèche de quelques décimètres, d'obtenir des épaisseurs plus considérables, sous de moindres pressions.

REMARQUES RELATIVES AUX ARCHES DE PONT *EN ANSE DE PANIER.*

51. Nous venons de passer en revue un assez grand nombre de ponts actuellement existants, et nous avons fait l'application de notre théorie aux données relatives à ces ponts, comme s'il se fût agi de procéder à leur construction. Dans beaucoup de cas, les résultats du calcul appliqué aux arches *en anse de panier* nous ont montré une incompatibilité entre les données, et nous avons été obligé de les modifier, pour arriver à la détermination d'un système d'éléments de construction qui pût satisfaire à la fois aux conditions d'une très-grande stabilité et aux exigences d'une économie bien entendue. En nous bornant toujours aux arches *en anse de panier* peu chargées au-dessus de la clef, ou dans lesquelles l'ordre de grandeur de la hauteur qui représente la charge est celui de l'épaisseur, il nous semble résulter des applications présentées dans le numéro précédent, et des courtes discussions auxquelles elles ont donné lieu, quelques conséquences importantes.

1° *Le surbaissement des arches complètes doit rester compris entre le tiers et le quart, et même ne point atteindre ces limites,* du moins tant que les matériaux employés seront des pierres calcaires, même les plus résistantes. Il s'ensuit que les arches *en plein cintre* ne doivent point être adoptées dans la construction des ponts : nous avons dit ailleurs qu'elles répondent à des charges infinies au-dessus de la clef, et que les voûtes qui s'en rapprochent le plus sont celles des tunnels, en raison des charges considérables qu'elles peuvent avoir à supporter.

2° *Le surbaissement des arches complètes doit être d'autant plus voisin du tiers ou du quart, que les ouvertures sont moindres ou plus grandes.* Cette conséquence, déduite de faits particuliers, est facile à expliquer : en effet, dans les arches de pont, la hauteur h de la charge au-dessus de la clef, qui sera plus généralement prise pour donnée que la quantité μ_1, peut être regardée comme indépendante des dimensions du pont en hauteur et largeur; elle ne dépend que de la nature et de l'emploi des matériaux qui composent la chaussée. La hauteur h est donc une grandeur absolue très-peu variable et qui se trouve, dès lors, être une fraction des autres dimensions, d'autant plus grande, que celles-ci sont moindres. Or nous savons que les formes d'arches doivent se rapprocher du *plein cintre* à mesure que les hauteurs de charge sont plus considérables (et il faut entendre ici les hauteurs relatives); donc, la forme des arches *en anse de panier* doit se rapprocher d'autant plus du *plein cintre* que ces arches ont une plus faible ouverture.

Les ingénieurs sont aujourd'hui dans l'habitude d'employer les surbaissements un tiers et un quart, et le plus souvent le premier de ces rapports; mais il est rare qu'ils adoptent des nombres intermédiaires, qui seraient cependant de beaucoup préférables.

Notre théorie, envisagée dans toute sa généralité, laisse le choix entièrement arbitraire de deux données, entre les trois quantités f, g et Y_1; mais, d'après ce qui vient d'être dit, les deux arbitraires doivent, dans la pratique, être assujetties à la condition que le surbaissement qui en résultera tombe entre le tiers et le quart.

Les valeurs admissibles de ce surbaissement seront, dans chaque cas, assez peu variables, pour que l'on soit tenté de regarder le rapport des deux arbitraires restantes comme ne pouvant pas être donné absolument *a priori*, et de rechercher, ailleurs que dans les circonstances locales, les raisons de ce rapport. Développons notre pensée.

Jusqu'ici nous avons considéré les arches comme soumises uniquement à l'action du poids de leurs diverses parties, et aux actions et réactions mutuelles de ces mêmes parties. C'est en ayant égard à la résistance des matériaux employés, et au peu de variabilité de la quantité h, que nous avons été conduit à établir les limites du surbaissement dans les arches complètes. Mais on conçoit que, si l'on tient compte en même temps des surcharges accidentelles et des chocs que les voitures lourdement chargées peuvent occasionner, on parvienne à déterminer la pression maximum par unité de surface à laquelle les voussoirs seront soumis, et qui se développera, soit dans l'état d'équilibre, soit dans l'état de vibration résultant de chocs plus ou moins répétés. Les pressions dépendront naturellement des hypothèses que l'on fera sur les surcharges et le mouvement des voitures; mais elles dépendront aussi de la constitution physique et géométrique des arches, que nous supposerons toutefois établies conformément à la théorie de l'équilibre des arches non soumises à des actions accidentelles. Or, comme nos équations laissent deux des trois quantités f, g et Y_1 entièrement arbitraires, on doit profiter de cette indétermination pour satisfaire à la condition que, dans le nouvel état du système, la pression maximum qui pourra se développer n'excède point une limite donnée, l'amplitude des oscillations étant d'ailleurs supposée très-petite.

L'analyse mathématique de cette partie de la question de la stabilité des voûtes dépend de l'intégration des équations aux différences partielles, et notre intention n'est pas de l'aborder en ce moment.

A défaut d'une solution théorique, l'expérience doit être con-

sultée; mais les ponts actuellement existants ne peuvent fournir que peu de renseignements, leurs formes et dimensions relatives n'ayant point été déterminées de manière à satisfaire à nos équations. Il serait fort à désirer que l'on appliquât notre méthode à quelques-uns au moins des nombreux ponts ou viaducs dont la construction des chemins de fer exige l'établissement. Comme il est toujours possible, en faisant varier assez peu la flèche ou l'ordonnée des naissances, de ramener l'épaisseur à la clef aux dimensions usitées, qui ne dépendent que de l'ouverture, il y aurait en cela de quoi rassurer les plus timorés d'entre les ingénieurs, et, dans ce cas, l'important avantage d'obtenir la plus grande stabilité que puisse présenter une arche dont les dimensions principales sont données.

Les arches incomplètes n'étant, au fond, que des portions d'arches complètes seraient l'objet de considérations analogues à celles qui ont été présentées relativement aux restrictions que les surcharges accidentelles doivent apporter dans le choix des données; mais les arches incomplètes comprenant une arbitraire de plus, il restera toujours plus de latitude à cet égard que dans le cas des autres arches.

RÉFLEXIONS GÉNÉRALES SUR LA THÉORIE EXPOSÉE DANS CE MÉMOIRE.

52. Les deux conditions que nous avons établies pour obtenir une très-grande stabilité dans les arches de pont, sont que la résultante des pressions dans les joints passe très-près du milieu de l'épaisseur des voussoirs, et que cette résultante soit normale aux plans de joint. Pour remplir le mieux possible la première de ces deux conditions, nous avons supposé, dans la mise en équation, les surfaces de joint réduites à celui de leurs éléments qui rencontre la *courbe des centres de gravité*, et nous avons admis que le contact étant ensuite rétabli sur des portions égales du plan de joint de part et d'autre de l'élément primitif, les pressions se répartiraient uniformément sur toute l'étendue du nouveau joint:

les défauts d'exécution des surfaces de joint ou d'homogénéité des voussoirs et des mortiers pourraient empêcher qu'il en fût ainsi; mais ce sont là des causes accidentelles. La seconde condition, relative à la direction normale de la résultante des pressions, a été remplie par le seul fait que les actions tangentielles ou frottements n'ont point été introduites dans les équations de l'équilibre : il est facile de réaliser cette condition dans la pratique, à l'aide de quelques précautions apportées dans la pose des voussoirs.

Nous avons vu comment les accidents de rupture qui se manifestent après le décintrement, dans les voûtes partiellement extradossées *en gradins*, peuvent être attribués à ce que la résultante des actions exercées par les assises sur les voussoirs est alors dirigée obliquement à l'extrados. L'indétermination des actions exercées sur la voûte dans ce genre de constructions et dans le cas où le massif est un simple blocage, jointe à des considérations théoriques, nous ont fait rechercher une disposition des matériaux formant le massif, qui, au frottement près (et il est inutile d'y avoir égard), donne lieu à des pressions normales égales à celles que produirait un liquide de même densité que le massif et soumis supérieurement à la même charge que celui-ci. C'est à cette disposition que s'appliquent ensuite nos calculs. Il n'est pas indispensable qu'elle soit réalisée en toute rigueur; il suffit, pour que nos calculs fournissent des indications satisfaisantes, que l'on supprime la disposition *en gradins*, comme le font déjà beaucoup d'ingénieurs, ou que la surface extrados soit sensiblement continue, sinon dans toute l'étendue de la voûte, du moins dans l'espace où l'inclinaison des joints avec la verticale s'étend de 18° à 75° environ.

Les résultats auxquels nous sommes parvenu (*) sont essentiel-

(*) Il ne sera pas sans intérêt de montrer jusqu'à quel point la manière abstraite dont les géomètres du siècle dernier ont traité les questions de statique, leur permettait cependant d'obtenir des solutions applicables aux cas de la pratique. Ces géomètres assimilaient l'équilibre des voûtes à celui d'un système d'éléments matériels de dimensions infiniment petites : c'est de cette manière qu'ils ont trouvé que la forme d'équilibre d'une voûte infiniment mince et d'épaisseur constante devait

lement relatifs à l'état de la voûte après le décintrement, celle-ci étant supposée soumise aux actions de son poids, de la surcharge permanente et aux réactions mutuelles de ses parties; de sorte qu'il faut encore rechercher quelle doit être la forme de la voûte sur ses cintres, pour qu'elle prenne, après leur enlèvement, la forme déterminée par la théorie que nous avons exposée. En un

---

être celle d'une chaînette renversée, lorsque la voûte est soumise uniquement à l'action de son propre poids.

Dans la question des arches de pont soumises à des forces normales dues à la pression d'un liquide, la manière de faire des anciens géomètres conduirait à des résultats identiques avec ceux qu'on déduirait de nos équations en y faisant $i = 1$, et négligeant les termes dépendants des épaisseurs autres que le terme fini $e\mu_o = \frac{1}{2} q^2$: l'expression (w) du rayon de courbure traitée ainsi, donne immédiatement

$$\rho'' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{y''}.$$

Nous avons obtenu cette équation sous une autre forme, dans notre deuxième article sur l'*Équilibre des voûtes en berceaux cylindriques*, en nous plaçant au point de vue abstrait des géomètres.

Or si l'on néglige seulement les termes du deuxième ordre dans le cas de $i = 1$, la première équation (XXIV) se réduit à

$$\rho'' = \frac{Q^2}{y''};$$

on a d'ailleurs par l'équation (VI), entre q^2, Q^2, h'' et e, la relation

$$\frac{q^2}{2} = Q^2 + h''e - \frac{2}{3} e^2;$$

d'où il suit que les deux relations précédentes seraient identiques, si les termes $h''e - \frac{2}{3} e^2$ pouvaient se réduire à zéro ou être négligés. Or, dans les arches de pont, h'' étant généralement supérieur à e d'une fraction assez faible, le produit $h''e$ est du deuxième ordre, et l'opposition de signe de ces termes atténue l'erreur commise en les négligeant entièrement. On peut donc dire que la solution abstraite ne diffère de celle plus approchée que nous avons obtenue, que de quantités du deuxième ordre, et nous avons vu qu'en pratique ces termes sont presque négligeables. La transition de la solution abstraite à la solution pratique consisterait à

mot, la question de l'inflexion est encore à résoudre; mais elle ne nous parait pas susceptible d'être traitée rigoureusement, si l'on n'étudie en même temps celle de l'équilibre du cintre lui-même, question dans laquelle le mode de pose des voussoirs ne devra pas être négligé. Toutefois, nous croyons avoir établi que, si l'on s'astreint aux formes que nous proposons, si l'on prend les

---

décomposer la constante $\frac{1}{2}q^2$ en un produit de deux facteurs finis ε et μ_0, le premier étant très-petit par rapport au second, mais non pas infiniment petit.

L'assimilation faite par les anciens géomètres, de leur système idéal avec une voûte ou une arche de pont, n'était pas suffisamment justifiée *a priori*, et l'on conçoit que les ingénieurs n'aient tenu aucun compte de résultats théoriques ainsi obtenus; mais il n'en faut pas moins remarquer l'espèce d'intuition qui a permis aux premiers de poser le problème de manière à obtenir des solutions beaucoup plus approchées qu'on ne devait rationnellement s'y attendre.

La solution approchée dont il vient d'être question donne lieu à une remarque digne d'intérêt : c'est que, à ce degré d'approximation, la courbe intrados coïncide avec la courbe dite *élastique*, dans un de ses cas particuliers. Considérons, en effet, l'équilibre d'une verge élastique assujettie à la condition de couper normalement l'axe des y en un point fixe dont l'ordonnée soit h'', et sollicitée du côté des x positifs par une force P parallèle à l'axe des x et de même sens que cet axe, dont l'ordonnée du point d'application soit b''; on aura, la concavité de la verge étant tournée du côté des y positifs (voir le *Traité de Mécanique* de Poisson, 2e édition, n° 308),

$$\frac{1}{\rho''} = -\frac{P}{\beta}(b'' - y''),$$

équation où β désigne un coefficient qui dépend des dimensions de la section transversale de la verge et du coefficient d'élasticité de la matière dont elle est formée. Les conditions d'identité de cette équation et de l'expression renversée du rayon de courbure

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{y''}{Q^2},$$

sont

$$b'' = 0, \qquad \frac{P}{\beta} = \frac{1}{Q^2}.$$

La première indique que la force P doit être appliquée dans le plan qui limite le massif supérieurement. Cette condition est facile à remplir au moyen d'une tige rigide disposée parallèlement à l'axe des y et liée invariablement à la courbe *élastique* en son extrémité libre : la force P s'appliquerait au point où cette tige rencontre l'axe des x. Si l'on conçoit une disposition toute pareille pour la partie de la verge située du côté des x négatifs, et dans laquelle la force P soit de sens

précautions convenables dans l'exécution et la pose des voussoirs, et que, d'ailleurs, on ait le soin de ne décintrer qu'après un certain avancement, sinon l'achèvement entier du massif, l'inflexion de la voûte sera très-faible, ou du moins incomparablement plus petite que les inflexions observées jusqu'ici (*).

Quant à l'action des surcharges accidentelles et des chocs pro-

---

opposé à la première, il est évident que l'on pourra supprimer le point fixe; il y a plus : les deux forces P égales et de sens opposés pourront être remplacées par une troisième tige rigide de longueur égale à la corde qui joint les deux extrémités libres de la verge, et placée dans l'intervalle compris entre les deux premières tiges, de manière à coïncider avec l'axe des x. En supposant mesurée la compression qu'éprouverait la troisième tige, sa valeur P permettrait de déduire, de la seconde équation de condition, la valeur du paramètre Q de l'équation de l'intrados.

Nous ne pouvons exposer ici comment l'appareil que nous venons d'examiner pourrait être utilisé dans la résolution des questions relatives aux arches de pont, ni comment on parvient, par de simples raisonnements, à vérifier la dépendance mutuelle des trois quantités f, g et Y_1 dans les arches complètes, et à distinguer le cas ou ces arches se réduisent au plein cintre; chacun le devinera aisément. Mais la construction de nos Tables permettant d'obtenir une exactitude très-suffisante, le rapprochement de deux problèmes aussi différents en apparence que ceux des arches de pont et des lames élastiques n'offre plus qu'un intérêt purement spéculatif.

(*) Nous ne pouvons exposer dans ce mémoire les recherches que nous avons entreprises sur la détermination de la forme à donner aux cintres supposés parfaitement rigides, pour que le profil de la voûte, après le décintrement, devienne identique avec celui qui résulte de notre théorie, dans le cas où l'opération du décintrement serait effectuée après l'achèvement du massif : le résultat de ces recherches est trop incomplet. Nous avons pu obtenir l'expression des limites de l'accroissement de flèche qu'il conviendrait de donner aux cintres : malheureusement, on ne possède aucune notion satisfaisante sur l'élasticité des pierres à bâtir et des mortiers ou ciments. Pour nous faire une idée de l'ordre de grandeur de l'inflexion du sommet d'une arche, inflexion qui est toujours en raison inverse du coefficient d'élasticité de la matière de la voûte, nous avons été réduit à supposer que les ciments solidifiés se contractent à peu près comme les voussoirs eux-mêmes, et à prendre un coefficient d'élasticité moyen entre ceux que l'on emploie ordinairement pour le bois et la fonte de fer. En faisant l'application de nos formules et de ce coefficient moyen aux grandes arches que nous avons étudiées nos 47 et 48, nous avons trouvé des variations de flèche notablement moindres qu'un centimètre. Ces résultats nous paraissent confirmer l'opinion énoncée dans le texte, malgré l'incertitude que présente le coefficient d'élasticité employé. Beaucoup d'ingénieurs assurément regarderaient de pareilles inflexions comme négligeables dans la pratique.

duits par le mouvement des lourdes voitures (*), nous avons vu que l'un des moyens à employer pour en prévenir les effets désastreux consiste à faire en sorte que dans l'état d'équilibre de la voûte non soumise à ces actions, la résultante des pressions passe très-près du milieu de l'épaisseur, et soit normale au plan de joint. Or notre théorie comprend déjà ces conditions. Mais il résulte des remarques du numéro précédent, que l'une des arbitraires du problème est assujettie pratiquement à rester dans des limites assez restreintes, pour qu'on doive plutôt la regarder comme une indéterminée dont on ait à profiter pour satisfaire aux nouvelles conditions statiques ou dynamiques résultant de la considération des surcharges accidentelles. Voici donc une nouvelle question à traiter dont la solution devrait précéder l'application de la théorie de l'inflexion de la voûte et de l'équilibre des cintres (**).

Tels sont les deux importants problèmes à résoudre pour que la question de l'établissement des arches de pont soit entièrement résolue : la théorie exposée dans le présent mémoire nous paraît

(*) Le mouvement des locomotives sur les ponts et viaducs détermine des pressions variables dues au mouvement relatif de leurs différents organes; en sorte que pour tenir compte de la surcharge qui en résulte, il faudrait connaître les valeurs de ces pressions : à cet égard, nous renverrons aux nos 20 et 28 de notre *Théorie de la stabilité des machines locomotives en mouvement*.

(**) Ici les difficultés provenant de l'indétermination des pressions dans les joints ne pourraient être levées par le procédé qui nous a réussi lors de la mise en équation; il serait de toute nécessité d'introduire l'élasticité des voussoirs. En attendant qu'une solution rigoureuse se produise, on pourrait procéder par voie de tâtonnements. Attribuant, par exemple, à l'indéterminée dont nous avons parlé, une valeur prise entre de certaines limites, et faisant l'application de notre théorie, on examinerait, à l'aide des procédés en usage, quelles sont, pour un mode donné d'action des surcharges accidentelles ; la situation du point d'application, la direction et l'intensité de la résultante des pressions en chaque joint; et l'on ferait varier l'indéterminée jusqu'à ce que l'on parvienne à des valeurs telles, que les trois éléments de la résultante des pressions restent compris dans des limites que la pratique tolère. Si l'étendue des valeurs de l'indéterminée qui satisfont à ces conditions restait sensible, on en profiterait pour choisir celle qui se rapproche le plus de la valeur donnée primitivement.

être le véritable point de départ dans l'étude de cette matière difficile.

ADDITIONS.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'INTRADOS FICTIF PAR LES SÉRIES.

La théorie des fonctions elliptiques n'étant connue que d'un très-petit nombre d'ingénieurs, nous présenterons ici l'expression en séries de l'équation de l'intrados fictif, pour le cas où le massif et la voûte sont supposés d'égale densité.

En faisant $i = 1$ dans les équations (z) et (a') (première partie du mémoire), et posant, pour abréger,

$$q''^2 = q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2. \qquad (\alpha)$$

l'équation différentielle (a') peut se mettre sous la forme

$$\pm\sqrt{2}\,\frac{dx''}{q''} = \frac{1 - \dfrac{y''^2 - h''^2}{q''^2} - \dfrac{4}{3}\dfrac{e^2}{q''^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{y''^2 - h''^2}{q''^2}}}\,\frac{dy''}{\sqrt{y''^2 - h''^2}}. \qquad (\beta)$$

La quantité sous le premier radical dans le second membre, étant élevée à la puissance $-\frac{1}{2}$, l'équation (β) devient, après de simples transformations,

$$\pm\sqrt{2}\,\frac{dx''}{q''} = \frac{d\dfrac{y''}{h''}}{\sqrt{\dfrac{y''^2}{h''^2} - 1}}\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\frac{h''^2}{2q''^2}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right) \\ &- \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^2\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^2 \\ &- \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^3\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^3 \\ &- \text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

La loi de la série comprise sous les parenthèses est manifeste.

Il reste à obtenir une suite d'intégrales de même forme. Posons généralement

$$A_m = \int \left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{m-\frac{1}{2}} d\frac{y''}{h''}; \qquad (\delta)$$

au moyen des formules connues de réduction des expressions des différentielles binômes, nous aurons, entre les diverses intégrales A_m, la relation

$$2m\,A_m = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{m-\frac{1}{2}} - (2m-1)\,A_{m-1}; \qquad (\varepsilon)$$

et chacune d'elles se trouvera ramenée à ne plus dépendre que de l'intégrale

$$A_0 = \int \frac{d\frac{y''}{h''}}{\sqrt{\frac{y''^2}{h''^2} - 1}} = \log\left[\frac{y''}{h''} + \sqrt{\frac{y''^2}{h''^2} - 1}\right] + \text{const.}$$

La condition que l'intégrale de l'expression (γ) donne $x'' = 0$ pour $y'' = h''$, détermine une valeur nulle de la constante.

On peut donner à A_0 les formes suivantes :

$$A_0 = \log \frac{\sqrt{y''+h''} + \sqrt{y''-h''}}{\sqrt{y''+h''} - \sqrt{y''-h''}} = \log \frac{1 + \sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}}{1 - \sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}}, \qquad (\zeta)$$

dont l'identité avec la précédente se vérifie aisément. Le dernier de ces logarithmes donne, pour expression de A_0 en série,

$$A_0 = 2\sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{y''-h''}{y''+h''} + \frac{1}{5}\left(\frac{y''-h''}{y''+h''}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{y''-h''}{y''+h''}\right)^3 + \ldots\right\}$$

Cette série est très-convergente, lorsque $y'' - h''$ est une petite fraction de $y'' + h''$.

En faisant successivement $m = 1$, $m = 2$,... dans la relation (ε), on a

$$2\,A_1 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1\,A_0,$$

$$4\,A_2 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - 3\,A_1,$$

$$6\,A_3 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} - 5\,A_2,$$

....

et, en substituant ces valeurs les unes dans les autres, on trouve

$$2\,A_1 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - A_0,$$

$$4\,A_2 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}A_0.$$

$$6\,A_3 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{4}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3.5}{2.4}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3.5}{2.4}A_0,$$

$$8\,A_4 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{7}{6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{5.7}{4.6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3.5.7}{2.4.6}A_0.$$

....

Intégrant actuellement l'expression (γ), et supposant, comme il a été dit, $x'' = 0$ pour $y'' = h''$, il viendra

$$\left.\begin{aligned} \pm\sqrt{2}\,\frac{x''}{q''} = \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)A_0 & - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\frac{h''^2}{2q''^2}A_1, \\ & - \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^2 A_2, \\ & - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^3 A_3, \\ & \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (\eta)$$

Telle est l'une des formes que l'on peut donner à l'équation de la courbe intrados fictif, à l'aide des séries.

Les fonctions A_0, A_1, etc., sont susceptibles d'être mises sous d'autres formes. Soit, en désignant par des lettres gothiques les sinus, cosinus hyperboliques et leurs fonctions inverses,

$$\mathfrak{cos}\, A_0 = \frac{y^2}{h^2};$$

d'où

$$\mathfrak{sin}\, \tfrac{1}{2} A_0 = \pm \sqrt{\frac{y^2 - h^2}{2h^2}}, \quad \mathfrak{cos}\, \tfrac{1}{2} A_0 = \sqrt{\frac{y^2 + h^2}{2h^2}}, \qquad (\theta)$$

puis

$$A_m = \int \mathfrak{sin}^{2m} A_0\, dA_0; \qquad (\iota)$$

on aura les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} 2\, A_1 = \mathfrak{cos}\, A_0\ \mathfrak{sin}\, A_0 - 1\, A_0, \\ 4\, A_2 = \mathfrak{cos}\, A_0\ \mathfrak{sin}^3 A_0 - 3\, A_1, \\ 6\, A_3 = \mathfrak{cos}\, A_0\ \mathfrak{sin}^5 A_0 - 5\, A_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (\varkappa).$$

Ces expressions peuvent être substituées les unes dans les autres. Il y a plus : la nouvelle forme donnée à la fonction A_m permet de la développer au moyen des sinus hyperboliques des multiples de $2A_0$; il suffit, pour cela, de développer $\mathfrak{sin}^{2m} A_0$ et d'intégrer après avoir tout multiplié par dA_0 : on trouve ainsi

$$A_m = \frac{1}{2^{2m-1}} \left\{ \frac{\mathfrak{sin}\, 2m A_0}{2m} - \frac{2m}{1} \frac{\mathfrak{sin}(2m-2) A_0}{2m-2} + \frac{2m(2m-1)}{1.2} \frac{\mathfrak{sin}(2m-4) A_0}{2m-4} - \dots \pm \frac{1}{2} \frac{2m(2m-1)(2m-2)\dots(m+1)}{1.2.3\dots m} A_0 \right\}. \quad (\lambda)$$

Enfin, au moyen des fonctions trigonométriques, si l'on pose

$$\cos\theta = \frac{h^2}{y^2},$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{y'' - h''}{2y''}};\quad \cos\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{y'' + h''}{2y''}};\quad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{y'' - h''}{y'' + h''}},\quad (\mu)$$

puis

$$A_m = \int \frac{\text{tang}^{2m}\theta}{\cos\theta}\,d\theta;\qquad (\nu)$$

on aura

$$2m\,A_m = \frac{\text{tang}^{2m-1}\theta}{\cos\theta} - (2m-1)\,A_{m-1},$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \log\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta),\\ 2\,A_1 &= \sec\theta\,\text{tang}\,\theta - 1\,A_0,\\ 4\,A_2 &= \sec\theta\,\text{tang}^3\theta - 3\,A_1,\\ 6\,A_3 &= \sec\theta\,\text{tang}^5\theta - 5\,A_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\quad (\xi)$$

L'angle θ et la fonction A_0, dans les formules qui dépendent des sinus hyperboliques, étant affectés du double signe, il devient inutile de conserver le signe $\pm$ qui affecte le premier membre de l'équation de l'intrados. On voit d'ailleurs clairement que la fonction A_m est une fonction impaire de θ dans les formules qui contiennent les fonctions trigonométriques, et de A_0 dans les autres, comme cela doit être.

Les formules que nous venons de présenter auraient pu servir au calcul de notre Table I; et elles serviraient, au besoin, à en augmenter l'étendue. Toutefois, la concordance parfaite entre les résultats qu'elles fournissent et ceux qui sont consignés dans cette même table offrent une nouvelle preuve de l'exactitude de nos calculs. Donnons un exemple de l'application numérique des formules précédentes : supposons qu'il s'agisse de construire l'une des

tables dont se compose la Table I; nous exclurons les termes du deuxième ordre et nous observerons que l'équation (α) comparée à la deuxième équation (3), n° 36, donne

$$q''^2 = 2\,Q^2; \qquad (o)$$

de cette manière, la série deviendra

$$\frac{x''}{Q} = A_0 - \frac{3}{2}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)A_1 - \frac{1}{2}\frac{5}{4}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^2 A_2 - \frac{1.3}{2.4}\frac{7}{6}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^3 A_3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{9}{8}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^4 A_4 - \text{etc.} \qquad (\varpi)$$

Au même degré d'approximation, l'on a

$$h'' = Y_0, \quad y''_1 = f + h'', \quad x''_1 = g, \quad \tang\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{f}{f+2h''}}. \qquad (\rho)$$

Si l'on se donne le rapport $\frac{Y_0}{f}$, on voit que les fonctions A_0, A_1,.. seront des constantes pour chacune des tables, et que $\frac{g}{f}$ sera une fonction de $\frac{Q}{f}$ ou de $\frac{Q^2}{f^2}$ seulement.

Soit, par exemple,

$$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7,$$

on aura

$$\tang\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sqrt{2{,}4}}, \text{ d'où } \tfrac{1}{2}\theta = 32^\circ\,50'\,31'',67;\ \theta = 65^\circ\,41'\,3'',35,$$

puis

$A_0 = 1{,}5350817$; $\;$ l. $A_1 = 0{,}2832641$; $\;$ l. $A_2 = 0{,}711086$;
l. $A_3 = 1{,}235668$; $\;$ l. $A_4 = 1{,}80542$; $\;$ l. $A_5 = 2{,}40111$.

A l'aide de ces valeurs, on obtient la formule

$$\frac{g}{f}\frac{f}{Q} = 1{,}5350817 - (9{,}5474914)\frac{f^2}{Q^2} - (8{,}683238)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^2 - (8{,}141054)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^3 - (7{,}70397)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^4 - (7{,}32004)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^5 - \text{etc.},$$

dans laquelle les nombres entre parenthèses sont les logarithmes des facteurs numériques dont ils tiennent la place. Cette formule permettrait de calculer avec une grande facilité la table inverse de celle qui forme la quatrième colonne de la Table I; mais elle se prêterait moins facilement au calcul de la fonction $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$ donnée dans la Table II.

En faisant, par exemple, $\frac{Q^2}{f^2} = 5{,}8$, les termes de la série deviendront

$$\begin{array}{l} +\ 1{,}5350817 \\ -\ 0{,}0608224 \\ -\ 0{,}0014334 \\ -\ 0{,}0000709 \\ -\ 0{,}0000045 \\ -\ 0{,}0000003 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{somme} = 1{,}4727502 = \frac{g}{f}\,\frac{f}{Q}, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 3{,}546853;$$

or ce résultat coïncide, à une unité près du dernier ordre, avec celui que nous avons obtenu en calculant nos tables à l'aide des formules du n° 36, et l'on ne pourrait pas répondre d'une unité de cet ordre, dans les calculs. Si l'on cherche dans la Table I la valeur de $\frac{g}{f}$ correspondante à $\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$ et $\frac{Q^2}{f^2} = 5{,}8$, on trouvera $\frac{g}{f} = 3{,}54685$, seules figures que peut donner cette table.

L'intégrale de l'équation (β) peut encore être exprimée au moyen d'une autre série, en posant, comme dans le n° 35 *bis*,

$$\cos\alpha' = 1 - \frac{y'^2 - k'^2}{q'^2}, \qquad (\sigma)$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha' = \pm\sqrt{\frac{y'^2 - k'^2}{2q'^2}}, \qquad (\tau)$$

puis

$$\sin\alpha'\, d\alpha' = \frac{2y''}{q''^2}\, dy'': \qquad (\upsilon)$$

on pourra mettre d'abord l'équation (β) sous la forme

$$\frac{dx''}{dy''} = \frac{\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}}{\sin\alpha'}, \qquad (\varphi)$$

et l'on aura, à cause de $\frac{dx''}{dy''} = \cot\alpha$,

$$\cot\alpha - \cot\alpha' = -\frac{\frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}}{\sin\alpha'},$$

d'où l'on tire aisément

$$\alpha = \alpha' + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\sin\alpha'. \qquad (\chi)$$

L'interprétation géométrique de cette relation entre les angles α et α' a été présentée dans le n° 35 *bis*. L'angle α se déduira avec facilité du système des équations (τ) et (χ).

En éliminant y'' et dy'' entre les trois équations (σ), (υ) et (φ), et posant, pour abréger,

$$\xi = \frac{q''^2}{q''^2 + h''^2}, \qquad (\psi)$$

il vient

$$2\frac{dx''}{\sqrt{q''^2 + h''^2}} = \frac{\xi\left(\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)}{\sqrt{1 - \xi\cos\alpha'}}\, d\alpha'. \qquad (\omega)$$

Pour intégrer cette expression, ayant effectué le développement de la quantité $1 - \xi\cos\alpha'$ à la puissance $-\frac{1}{2}$, et multiplié ensuite par $\xi\left(\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)d\alpha'$, nous avons obtenu une suite de

termes de la forme $\cos^m\alpha' d\alpha'$ auxquels a été appliquée la formule de réduction

$$\int \cos^m\alpha' d\alpha' = \frac{1}{m}\sin\alpha' \cos^{m-1}\alpha' + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}\alpha' d\alpha'.$$

Nous nous bornerons à présenter le résultat des calculs. Posant

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\xi}{1}\left(1 + \frac{1.3}{2.4}\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{2.4}{3.5}\xi^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\frac{2.4.6}{3.5.7}\xi^6 + \ldots\right)\\
C_1 &= \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{2}\left(1 + \frac{3.5}{4.6}\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\frac{3.5}{4.6}\xi^4 + \ldots\right)\\
C_2 &= \frac{1.3}{2.4}\frac{\xi^3}{3}\left(1 + \frac{5.7}{6.8}\frac{4}{5}\xi^2 + \ldots\right)\\
C_3 &= \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\xi^4}{4}\left(1 + \ldots\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\}\quad (\alpha')$$

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\frac{\xi}{1}\left(1 + \frac{3.5}{4.6}\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\frac{2.4}{3.5}\xi^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12}\frac{2.4.6}{3.5.7}\xi^6 + \ldots\right)\\
c_1 &= \frac{1.3}{2.4}\frac{\xi^2}{2}\left(1 + \frac{5.7}{6.8}\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{5.7.9.11}{6.8.10.12}\frac{3.5}{4.6}\xi^4 + \ldots\right)\\
c_2 &= \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\xi^3}{3}\left(1 + \frac{7.9}{8.10}\frac{4}{5}\xi^2 + \ldots\right)\\
c_3 &= \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\xi^4}{4}\left(1 + \ldots\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\}\quad (\beta')$$

on a pour intégrale de l'équation (ϖ),

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{x'}{\sqrt{q'^2+h'^2}} = {} & C_1\alpha' + C_0\sin\alpha' + C_1\sin\alpha'\cos\alpha' + C_2\sin\alpha'\cos^2\alpha' + C_3\sin\alpha'\cos^3\alpha' + \ldots\\
& - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{q'^2}\xi\left\{\begin{aligned}&(1+c_1)\alpha' + c_0\sin\alpha' + c_1\sin\alpha'\cos\alpha'\\ &+ c_2\sin\alpha'\cos^2\alpha' + c_3\sin\alpha'\cos^3\alpha' + \ldots\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad (\gamma')$$

La constante de l'intégration est nulle, attendu que l'on suppose x'' nul lorsque y'' est égal à h''. On aurait pu se proposer d'obtenir l'intégrale sous forme d'une suite de termes procédant suivant les sinus des multiples de α' : pour cela il eût fallu transformer les puissances de cosinus en cosinus de multiples. L'expression (γ'), qui contient l'angle α' en dehors des signes sinus et cosinus, met en évidence la reproduction périodique des mêmes formes de la courbe intrados : elle ne pourrait être de quelque utilité que dans les cas où la constante ξ serait une fraction assez petite, comme dans ceux que présentent les tunnels et les *poitrails*.

Considérons le cas idéal où l'on supposerait l'épaisseur nulle, et la hauteur h'' infinie : soit f'' la flèche correspondante à la valeur maximum de x''; l'équation (ω) donne pour condition de ce maximum, $\cos\alpha' = 0$; l'équation (σ), en y égalant son second membre à zéro, et écrivant $f'' + h''$ à la place de y'', fournit la valeur de la constante q''^2,

$$q''^2 = f''(f'' + 2h''), \qquad (\delta')$$

d'où résulte

$$q''^2 + h''^2 = (f'' + h'')^2; \qquad \xi = \frac{f''(f'' + 2h'')}{(f'' + h'')^2}. \qquad (\varepsilon')$$

La flèche f'' étant finie, on voit que la quantité ξ est infiniment petite du premier ordre. Cette circonstance réduit l'équation (γ') à

$$2x''\frac{f'' + h''}{f''(f'' + 2h'')} = \sin\alpha',$$

en vertu des valeurs précédentes; l'équation (σ) donne elle-même

$$1 - \frac{(y'' - h'')(y'' + h'')}{f''(f'' + 2h'')} = \cos\alpha'.$$

Éliminant α' entre ces deux équations, il vient

$$4\frac{x''^2}{f''^2}\left(\frac{f'' + h''}{f'' + 2h''}\right)^2 + \left[\frac{(y'' - h'')(y'' + h'') - f''(f'' + 2h'')}{f''(f'' + 2h'')}\right]^2 = 1.$$

Or, on peut négliger ici f'' devant h'' et mettre $2h''$ à la place de $y'' + h''$, en sorte que cette équation se réduit à

$$\frac{x''^2}{f''^2} + \frac{(y'' - h'' - f'')^2}{f''^2} = 1,$$

équation qui n'est autre chose que celle d'un cercle de rayon f'', et dont le centre a pour ordonnée $h'' + f''$. Ce résultat était facile à prévoir, d'après ce qui a été dit plusieurs fois à l'égard des hauteurs de charge considérables.

Nous ne nous étendrons pas sur l'usage que l'on pourrait faire des expressions de x'' en séries; nous croyons en avoir assez dit pour que chacun, au besoin, puisse aisément tirer parti de ces développements.

PONTS TERMINÉS PAR DES ARCHES SECONDAIRES DE DIMENSIONS GÉNÉRALEMENT MOINDRES QUE CELLES DES ARCHES PRINCIPALES.

Dans l'impossibilité d'aborder ici, sous toutes ses faces, le problème que présente l'établissement des ponts formés d'arches inégales, nous nous bornerons à des indications sommaires. Ces indications suffiront aux ingénieurs qui possèdent les notions relatives à l'établissement d'un massif de maçonnerie soumis à l'action de forces données.

Les arches principales et les arches secondaires sont séparées par une pile de largeur beaucoup plus considérable que celle des piles interposées entre les arches principales. Cette pile peut être envisagée comme faisant, en partie, fonction de culée à l'égard des deux arches inégales. Le défaut de symétrie de ces arches entraîne une complication dont la question de l'établissement des piles ordinaires se trouve exempte.

Supposons tout d'abord les diverses parties de la construction déterminées, la question à examiner sera celle de la stabilité de la pile-culée qui sépare deux arches inégales. A cet effet, considérons l'équilibre d'une portion de cette pile-culée limitée dans

le sens vertical par deux plans menés, l'un par celle des arêtes inférieures des deux extrados qui est la plus élevée, l'autre à un niveau inférieur d'une quantité quelconque au niveau le moins élevé des naissances des deux intrados, les limites dans le sens horizontal étant les plans des pieds-droits, et un plan vertical passant par l'arête inférieure la moins élevée des deux extrados, tandis que les plans de joint des naissances achèvent de déterminer la portion de la pile-culée dont il s'agit. Les forces qui sollicitent ce système considéré dans son ensemble doivent satisfaire aux conditions de l'équilibre d'un corps solide; celles d'entre elles qui sont censées connues sont : le poids des matériaux qui reposent directement sur le plan horizontal supérieur et le poids propre du système, puis les poussées exercées normalement aux plans des naissances, enfin la poussée horizontale produite par le massif contre le plan vertical mené par l'arête inférieure la moins élevée des deux intrados. Les points d'application de ces forces sont d'ailleurs également connus, en sorte que leur résultante, qui ne se réduira pas généralement à un couple, étant prise en sens contraire, déterminera la résultante des réactions exercées contre le plan inférieur dans le cas de l'équilibre. Sous le rapport de la stabilité, la direction, l'intensité et la situation des points d'application de cette force devront satisfaire à des conditions relatives à la nature des matériaux et à l'hypothèse faite sur la distribution des réactions (voir la note du n° 49). La détermination des actions intérieures qui se développent dans le système, présente des difficultés insurmontables dans l'état actuel de nos connaissances en cette matière, et l'on ne peut que recommander d'apporter dans le choix des pierres et mortiers et leur arrangement, toutes les précautions nécessaires pour que l'ensemble puisse être assimilé à un seul corps solide, lors du décintrement des arches.

Supposons que les conditions de stabilité soient remplies à l'égard du système limité inférieurement par l'assise correspondante à celle des naissances qui est la moins élevée; il sera facile,

en partant de la résultante obtenue, et au moyen des poids des assises inférieures, de construire le polygone des pressions exercées sur les surfaces de joint des diverses assises jusqu'aux fondations. Les diverses résultantes obtenues devront pouvoir satisfaire aux mêmes conditions que ci-dessus, pour que la stabilité de la pile-culée soit assurée.

Si ces conditions n'étaient pas remplies, on serait dans la nécessité de modifier une ou plusieurs des données du problème qui ne seraient pas fixées d'une manière absolue, et le sens de ces modifications serait facile à découvrir : une suite de tâtonnements, en l'absence d'un système de formules appropriées à la question, conduirait à la détermination d'un ensemble d'éléments qui satisferait aux conditions de stabilité.

Les différentes manières suivant lesquelles on groupera ceux des éléments de la construction que l'on pourra regarder comme donnés, présenteront autant de problèmes distincts, dont la solution dépendra des courtes notions que nous venons d'exposer.

L'auteur du mémoire qu'on vient de lire, ayant abandonné en 1846 la carrière de l'ingénieur pour entrer à l'Observatoire de Paris, s'est trouvé, par suite de l'exigence de ses nouvelles fonctions, dans l'impossibilité de continuer ses recherches sur la théorie des voûtes, et il s'est décidé à présenter la deuxième partie de son mémoire à l'Académie, quoiqu'il n'eût point encore calculé de tables relatives aux arches dites *en arc de cercle*, ni produit d'application de pareilles tables.

La nécessité de combler une telle lacune a déterminé l'auteur, au moment de l'impression du mémoire, à consacrer la partie disponible de son temps au calcul de nouvelles tables : cette

circonstance l'a empêché de réduire l'étendue de la première partie du mémoire, et de rechercher, quant à la seconde, une distribution des matières qui lui permît d'éviter les répétitions qu'on y pourrait remarquer.

TABLES

RELATIVES

A L'ÉTABLISSEMENT

DES ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE*,

ET

DES ARCHES COMPLÈTES, OU *EN ANSE DE PANIER*.

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}8$	Diff.
3,50	3,6144	189	4,3019	226	4,9830	262	5,8600	297	6,3340	333
3,51	3,6333	190	4,3245	226	5,0092	262	5,6897	298	8,3873	333
3,52	3,8523	190	4,3471	227	5,0354	263	5,7195	299	8,4008	335
3,53	3,6713	190	4,3698	227	5,0617	264	5,7494	300	6,4341	336
3,54	3,6903	192	4,3925	228	5,0881	265	5,7794	301	6,4877	337
3,55	3,7095	191	4,4153	229	5,1146	265	5,8095	301	6,5014	338
3,56	3,7286	193	4,4382	229	5,1411	266	5,8396	303	6,5352	339
3,57	3,7479	192	4,4611	230	5,1677	266	5,8699	303	6,5691	339
3,58	3,7671	194	4,484[illegible]	230	5,1943	268	5,9002	305	6,6030	341
3,59	3,7865	194	4,5071	232	5,2211	288	5,9307	304	6,6371	342
3,80	3,8059	195	4,5303	231	5,2479	270	5,9811	306	6,6713	343
3,61	3,8254	194	4,5535	233	5,2749	269	5,9917	307	6,7056	343
3,62	3,8448	198	4,5768	233	5,3018	271	6,0224	308	6,7399	344
3,63	8,8644	196	4,8001	234	5,3289	271	6,0532	308	6,7743	348
3,64	3,8840	197	4,6235	234	5,3560	272	6,0840	309	6,8089	346
3,65	3,9037	197	4,6469	235	5,3832	273	6,1149	310	6,8435	347
3,66	3,9234	198	4,6704	236	5,4105	273	6,1459	312	6,8782	349
3,87	3,9432	198	4,6940	236	5,4378	274	6,1771	311	6,9131	349
3,68	3,9630	199	4,7176	238	5,4652	275	8,2082	313	6,9480	350
3,69	3,9829	199	4,7414	237	5,4927	276	6,2395	313	6,9830	352
3,70	4,0028	200	4,7651	238	5,5203	277	6,2708	315	7,0182	351
3,71	4,0228	200	4,7889	239	5,5480	277	8,3023	315	7,0533	353
3,72	4,0428	202	4,8128	240	5,5757	278	6,3338	316	7,0886	354
3,73	4,0630	201	4,8368	241	5,6035	279	6,3654	317	7,1240	355
3,74	4,0831	[illegible]	4,8609	241	5,6314	279	6,3971	318	7,1595	356
3,75	4,1033	203	4,8850	241	5,6593	280	8,4289	318	7,1951	357
3,76	4,1236	203	4,9091	242	5,6873	281	6,4607	319	7,2308	358
3,77	4,1439	204	4,9333	243	5,7154	282	6,4926	321	7,2666	359
3,78	4,1643	204	4,9576	244	5,7436	282	6,5247	321	7,3025	359
3,79	4,1847	204	4,9820	244	5,7718	283	6,5568	322	7,3384	360
3,80	4,2051		5,0064		5,8001		6,5890		7,3744	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
3,50	7,0059	368	7,6761	405	8,3454	439	9,0136	475	9,6810	510
3,51	7,0427	370	7,7166	405	8,3893	441	9,0611	476	9,7320	512
3,52	7,0797	371	7,7571	407	8,4334	442	9,1087	477	9,7832	513
3,53	7,1168	372	7,7978	408	8,4776	443	9,1564	479	9,8345	515
3,54	7,1540	372	7,8386	408	8,5219	445	9,2043	480	9,8860	516
3,55	7,1912	374	7,8794	410	8,5664	445	9,2523	482	9,9376	518
3,56	7,2286	376	7,9204	411	8,6109	447	9,3005	483	9,9894	518
3,57	7,2662	375	7,9615	412	8,6556	449	9,3488	485	10,0412	520
3,58	7,3037	377	8,0027	413	8,7005	449	9,3973	485	10,0932	522
3,59	7,3414	378	8,0440	415	8,7454	451	9,4458	487	10,1454	524
3,60	7,3792	379	8,0855	415	8,7905	452	9,4945	489	10,1978	524
3,61	7,4171	380	8,1270	417	8,8357	454	9,5434	490	10,2502	526
3,62	7,4551	382	8,1687	418	8,8811	454	9,5924	491	10,3028	528
3,63	7,4933	382	8,2105	[illegible]	8,9265	456	9,6415	492	10,3556	529
3,64	7,5315	383	8,2524	420	8,9721	457	9,6907	494	10,4085	531
3,65	7,5698	385	8,2944	422	9,0178	459	9,7401	495	10,4616	532
3,66	7,6083	385	8,3366	422	9,0637	459	9,7896	497	10,5148	533
3,67	7,6468	387	8,3788	424	9,1096	461	9,8393	498	10,5681	535
3,68	7,6855	387	8,4212	425	9,1557	462	9,8891	499	10,6216	537
3,69	7,7242	389	8,4637	426	9,2019	463	9,9390	500	10,6753	538
3,70	7,7631	389	8,5063	427	9,2482	465	9,9890	502	10,7291	539
3,71	7,8020	391	8,5490	429	9,2947	466	10,0392	504	10,7830	541
3,72	7,8411	392	8,5919	429	9,3413	467	10,0896	505	10,8371	542
3,73	7,8803	393	8,6348	431	9,3880	468	10,1401	506	10,8913	544
3,74	7,9196	394	8,6779	431	9,4348	470	10,1907	507	10,9457	545
3,75	7,9590	395	8,7210	433	9,4818	470	10,2414	508	11,0002	546
3,76	7,9985	396	8,7643	435	9,5288	472	10,2922	510	11,0548	548
3,77	8,0381	397	8,8078	435	9,5760	474	10,3432	512	11,1096	549
3,78	8,0778	398	8,8513	436	9,6234	475	10,3944	513	11,1645	551
3,79	8,1176	399	8,8949	437	9,6709	476	10,4457	514	11,2196	553
3,80	8,1575		8,9386		9,7185		10,4971		11,2749	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (*Arches incomplètes, dites en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}8$	Diff.
3,80	4,2051	206	5,0064	245	5,8001	285	6,5890	323	7,3744	362
3,81	4,2257	205	5,0309	245	5,8286	284	8,6213	324	7,4106	363
3,82	4,2462	207	5,0554	246	5,8570	286	6,6537	324	7,4469	363
3,83	4,2669	207	5,0800	247	5,8856	286	6,6881	326	7,4832	365
3,84	4,2876	208	5,1047	248	5,9142	287	8,7187	326	7,5197	365
3,85	4,3084	207	5,1295	248	5,9429	287	6,7513	327	7,5582	387
3,86	4,3291	209	5,1543	249	5,9716	289	6,7840	328	7,5929	367
3,87	4,3500	209	5,1792	249	6,0005	289	6,8168	329	7,8298	369
3,88	4,3709	210	5,2041	250	6,0294	290	8,8497	329	7,6685	369
3,89	4,3919	210	5,2291	250	6,0584	291	6,8828	331	7,7034	370
3,90	4,4129	210	5,2541	251	8,0875	293	6,9157	331	7,7404	371
3,91	4,4339	212	5,2792	252	6,1168	293	6,9488	332	7,7775	371
3,92	4,4551	211	5,3044	253	6,1459	292	6,9820	333	7,8146	373
3,93	4,4762	212	5,3297	253	6,1751	294	7,0153	334	7,8519	374
3,94	4,4974	214	5,3550	254	6,2045	295	7,0487	335	7,8893	375
3,95	4,5188	213	5,3804	255	6,2340	295	7,0822	336	7,9268	376
3,96	4,5401	214	5,4059	255	6,2635	296	7,1158	336	7,9644	377
3,97	4,5615	215	5,4314	256	8,2931	296	7,1494	338	8,0021	378
3,98	4,5830	214	5,4570	256	6,3227	298	7,1832	338	8,0399	378
3,99	4,6044	216	5,4826	257	6,3525	298	7,2170	339	8,0777	380
4,00	4,8260	216	5,5083	258	6,3823	299	7,2509	339	8,1157	381
4,01	4,6476	217	5,5341	258	6,4122	299	7,2848	341	8,1538	381
4,02	4,8693	217	5,5599	259	6,4421	301	7,3189	342	8,1919	382
4,03	4,6910	218	5,5858	259	8,4722	301	7,3531	342	8,2301	384
4,04	4,7128	218	5,6117	261	8,5023	302	7,3873	344	8,2685	385
4,05	4,7346	219	5,8378	281	6,5325	303	7,4217	344	8,3070	385
4,06	4,7565	219	5,6639	261	6,5628	303	7,4561	345	8,3455	387
4,07	4,7784	220	5,6900	262	8,5931	304	7,4906	345	8,3842	387
4,08	4,8004	220	5,7162	263	6,6235	305	7,5251	347	8,4229	388
4,09	4,8224	221	5,7425	264	6,6540	305	7,5598	348	8,4617	389
4,10	4,8445		5,7689		6,6845		7,5946		8,5006	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,3$	Diff.
3,80	8,1575	400	8,9388	439	9,7185	477	10,4971	516	11,2749	554
3,81	8,1975	401	8,9825	440	9,7662	478	10,5487	517	11,3303	555
3,82	8,2376	402	9,0265	441	9,8140	480	10,6004	518	11,3858	557
3,83	8,2778	404	9,0706	442	9,8620	481	10,6522	519	11,4415	558
3,84	8,3182	404	9,1148	444	9,9101	482	10,7041	521	11,4973	560
3,85	8,3586	406	9,1592	444	9,9583	483	10,7562	522	11,5533	561
3,86	8,3992	406	9,2036	446	10,0066	484	10,8084	524	11,6094	563
3,87	8,4398	408	9,2482	446	10,0550	486	10,8608	525	11,6657	564
3,88	8,4806	408	9,2928	448	10,1036	488	10,9133	526	11,7221	565
3,89	8,5214	410	9,3376	449	10,1524	488	10,9659	528	11,7786	567
3,90	8,5624	411	9,3825	451	10,2012	490	11,0187	530	11,8353	569
3,91	8,6035	412	9,4276	451	10,2502	491	11,0717	530	11,8922	570
3,92	8,6447	413	9,4727	453	10,2993	492	11,1247	532	11,9492	571
3,93	8,6860	413	9,5180	453	10,3485	493	11,1779	533	12,0063	573
3,94	8,7273	415	9,5633	455	10,3978	495	11,2312	534	12,0636	574
3,95	8,7688	416	9,6088	456	10,4473	496	11,2846	536	12,1210	576
3,96	8,8104	417	9,6544	458	10,4969	497	11,3382	537	12,1786	577
3,97	8,8521	418	9,7002	458	10,5466	499	11,3919	539	12,2363	579
3,98	8,8939	419	9,7460	459	10,5965	500	11,4458	540	12,2942	580
3,99	8,9358	420	9,7919	461	10,6465	501	11,4998	541	12,3522	581
4,00	8,9778	422	9,8380	462	10,6966	502	11,5539	543	12,4103	583
4,01	9,0200	422	9,8842	462	10,7468	503	11,6082	544	12,4686	584
4,02	9,0622	424	9,9304	464	10,7971	505	11,6626	545	12,5270	586
4,03	9,1046	424	9,9768	466	10,8476	506	11,7171	547	12,5856	588
4,04	9,1470	425	10,0234	466	10,8982	507	11,7718	548	12,6444	589
4,05	9,1895	427	10,0700	468	10,9489	509	11,8266	549	12,7033	590
4,06	9,2322	428	10,1168	468	10,9998	510	11,8815	551	12,7623	592
4,07	9,2750	428	10,1636	470	11,0508	511	11,9366	552	12,8215	593
4,08	9,3178	430	10,2106	472	11,1019	512	11,9918	553	12,8808	595
4,09	9,3608	430	10,2578	472	11,1531	513	12,0471	555	12,9403	596
4,10	9,4038		10,3050		11,2044		12,1026		12,9999	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,8$	Diff.
4,10	4,8445	222	5,7689	264	6,6845	307	7,5946	348	8,5006	390
4,11	4,8667	222	5,7953	265	6,7152	307	7,6294	349	8,5396	391
4,12	4,8889	223	5,8218	266	6,7459	308	7,6643	350	8,5787	392
4,13	4,9112	223	5,8484	266	6,7767	309	7,6993	351	8,6179	393
4,14	4,9335	224	5,8750	266	6,8076	309	7,7344	351	8,6572	394
4,15	4,9559	224	5,9016	268	6,8385	310	7,7695	353	8,6966	395
4,16	4,9783	225	5,9284	268	6,8695	311	7,8048	353	8,7361	396
4,17	5,0008	225	5,9552	269	6,9006	311	7,8401	355	8,7757	397
4,18	5,0233	226	5,9821	269	6,9317	313	7,8756	355	8,8154	398
4,19	5,0459	226	6,0090	270	6,9630	313	7,9111	356	8,8552	398
4,20	5,0685	227	6,0360	270	6,9943	314	7,9467	358	8,8950	400
4,21	5,0912	228	6,0630	271	7,0257	314	7,9825	357	8,9350	400
4,22	5,1140	228	6,0901	272	7,0571	315	8,0182	358	8,9750	402
4,23	5,1368	228	6,1173	273	7,0886	316	8,0540	359	9,0152	402
4,24	5,1596	229	6,1446	273	7,1202	317	8,0899	360	9,0554	404
4,25	5,1825	230	6,1719	274	7,1519	318	8,1259	361	9,0958	404
4,26	5,2055	230	6,1993	274	7,1837	318	8,1620	363	9,1362	405
4,27	5,2285	231	6,2267	275	7,2155	319	8,1983	362	9,1767	406
4,28	5,2516	231	6,2542	276	7,2474	320	8,2345	364	9,2173	407
4,29	5,2747	232	6,2818	276	7,2794	321	8,2709	364	9,2580	409
4,30	5,2979	232	6,3094	278	7,3115	321	8,3073	366	9,2989	409
4,31	5,3211	233	6,3372	277	7,3436	322	8,3439	366	9,3396	410
4,32	5,3444	233	6,3649	278	7,3758	323	8,3805	367	9,3808	411
4,33	5,3677	234	6,3927	279	7,4081	324	8,4172	368	9,4219	412
4,34	5,3911	235	6,4206	280	7,4405	324	8,4540	368	9,4631	413
4,35	5,4146	234	6,4486	280	7,4729	325	8,4908	370	9,5044	414
4,36	5,4380	236	6,4766	281	7,5054	326	8,5276	370	9,5458	415
4,37	5,4616	236	6,5047	281	7,5380	326	8,5646	372	9,5873	416
4,38	5,4852	237	6,5326	282	7,5706	327	8,6020	372	9,6289	416
4,39	5,5089	237	6,5610	283	7,6033	328	8,6392	373	9,6705	418
4,40	5,5326		6,5893		7,6361		8,6765		9,7123	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,3$	Diff.
4,10	9,4036	432	10,3050	473	11,2044	515	12,1026	556	12,9999	597
4,11	9,4470	433	10,3523	474	11,2559	516	12,1582	558	13,0596	599
4,12	9,4903	434	10,3997	475	11,3075	517	12,2140	559	13,1195	600
4,13	9,5337	435	10,4472	477	11,3592	519	12,2699	560	13,1795	602
4,14	9,5772	436	10,4949	476	11,4111	520	12,3259	562	13,2397	604
4,15	9,6208	437	10,5427	479	11,4631	521	12,3821	563	13,3001	605
4,16	9,6645	438	10,5906	481	11,5152	522	12,4384	564	13,3606	606
4,17	9,7083	439	10,6387	481	11,5674	524	12,4946	566	13,4212	608
4,18	9,7522	440	10,6668	483	11,6198	525	12,5614	567	13,4820	609
4,19	9,7962	441	10,7351	483	11,6723	526	12,6081	569	13,5429	610
4,20	9,8403	443	10,7634	485	11,7249	527	12,6650	569	13,6039	612
4,21	9,8846	443	10,6319	486	11,7776	529	12,7219	571	13,6651	614
4,22	9,9289	444	10,8805	467	11,8305	529	12,7790	573	13,7265	615
4,23	9,9733	445	10,9292	489	11,8834	531	12,8363	574	13,7880	617
4,24	10,0176	447	16,9781	489	11,9365	533	12,8937	575	13,8497	616
4,25	10,0625	448	11,0270	491	11,9898	533	12,9512	576	13,9115	619
4,26	10,1073	449	11,0761	492	12,0431	535	13,0088	578	13,9734	621
4,27	10,1522	449	11,1253	493	12,0966	536	13,0666	579	14,0355	622
4,28	10,1971	451	11,1746	494	12,1502	538	13,1245	581	14,0977	624
4,29	10,2422	451	11,2240	495	12,2040	538	13,1826	582	14,1601	625
4,30	10,2873	453	11,2735	496	12,2578	540	13,2408	583	14,2226	627
4,31	10,3326	454	11,3231	498	12,3116	541	13,2991	585	14,2853	628
4,32	10,3780	455	11,3729	499	12,3659	543	13,3576	586	14,3481	629
4,33	10,4235	456	11,4228	499	12,4202	543	13,4162	587	14,4110	631
4,34	10,4691	457	11,4727	501	12,4745	545	13,4749	589	14,4741	633
4,35	10,5148	458	11,5228	502	12,5290	546	13,5338	590	14,5374	634
4,36	10,5606	459	11,5730	504	12,5636	548	13,5926	591	14,6008	635
4,37	10,6065	461	11,6234	504	12,6384	548	13,6519	593	14,6643	637
4,38	10,6526	461	11,6738	506	12,6932	550	13,7112	594	14,7280	639
4,39	10,6987	462	11,7244	507	12,7482	551	13,7706	596	14,7919	640
4,40	10,7449		11,7751		12,8033		13,6302		14,6559	

TABLE L.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^3}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g_0}{f}$	$\frac{Y_0}{f}=0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f}=0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f}=0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f}=0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f}=0,8$	Diff.
4,40	5,5326	238	6,5893	284	7,6361	329	8,6765	374	9,7123	419
4,41	5,5564	238	6,6177	284	7,6690	329	8,7139	374	9,7542	419
4,42	5,5802	239	6,6461	285	7,7019	331	8,7513	376	9,7961	421
4,43	5,6041	239	6,6746	285	7,7350	331	8,7889	376	9,8382	421
4,44	5,6280	240	6,7031	286	7,7681	332	8,8265	377	9,8803	423
4,45	5,6520	240	6,7317	287	7,8013	333	8,8642	378	9,9226	423
4,46	5,6760	241	6,7604	288	7,8346	333	8,9020	380	9,9649	424
4,47	5,7001	242	6,7892	287	7,8679	334	8,9400	379	10,0073	426
4,48	5,7243	242	6,8179	289	7,9013	335	8,9779	381	10,0499	426
4,49	5,7485	243	6,8468	289	7,9348	335	9,0160	381	10,0925	427
4,50	5,7728	243	6,8757	290	7,9683	336	9,0541	382	10,1352	429
4,51	5,7971	244	6,9047	291	8,0019	337	9,0923	383	10,1781	429
4,52	5,8215	244	6,9338	291	8,0356	338	9,1306	384	10,2210	430
4,53	5,8459	244	6,9629	292	8,0694	339	9,1690	385	10,2640	430
4,54	5,8703	245	6,9921	292	8,1033	339	9,2075	386	10,3070	432
4,55	5,8948	246	7,0213	293	8,1372	340	9,2461	386	10,3502	433
4,56	5,9194	247	7,0506	294	8,1712	341	9,2847	388	10,3935	434
4,57	5,9441	247	7,0800	295	8,2053	341	9,3235	388	10,4369	435
4,58	5,9688	247	7,1095	295	8,2394	342	9,3623	389	10,4804	436
4,59	5,9935	248	7,1390	295	8,2736	344	9,4012	390	10,5240	436
4,60	6,0183	249	7,1685	297	8,3080	343	9,4402	391	10,5676	438
4,61	6,0432	249	7,1982	297	8,3423	345	9,4793	392	10,6114	439
4,62	6,0681	250	7,2279	298	8,3768	345	9,5185	392	10,6553	440
4,63	6,0931	249	7,2577	298	8,4113	346	9,5577	393	10,6993	440
4,64	6,1180	251	7,2875	298	8,4459	346	9,5970	395	10,7433	441
4,65	6,1431	251	7,3173	300	8,4805	347	9,6365	395	10,7874	443
4,66	6,1682	252	7,3473	300	8,5152	349	9,6760	396	10,8317	443
4,67	6,1934	253	7,3773	301	8,5501	349	9,7156	397	10,8760	444
4,68	6,2187	253	7,4074	302	8,5850	350	9,7553	397	10,9204	445
4,69	6,2440	253	7,4376	302	8,6200	350	9,7950	398	10,9649	447
4,70	6,2693		7,4678		8,6550		9,8348		11,0096	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q'}{f^2}$. (Arches incomplètes, dites en arc de cercle.)

$\frac{g}{f}$.	$\frac{Y_0}{f} = 0,9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,3$	Diff.
4,40	10,7449	464	11,7751	508	12,8033	553	13,8302	597	14,8559	641
4,41	10,7913	464	11,8259	508	12,8586	553	13,8899	598	14,9200	643
4,42	10,8377	465	11,8767	510	12,9139	555	13,9497	599	14,9843	644
4,43	10,8842	467	11,9277	512	12,9694	557	14,0096	601	15,0487	645
4,44	10,9809	467	11,9789	513	13,0251	557	14,0697	602	15,1132	647
4,45	10,9776	469	12,0301	513	13,0808	559	14,1299	604	15,1779	649
4,46	11,0245	470	12,0815	515	13,1367	560	14,1903	605	15,2428	650
4,47	11,0715	470	12,1330	616	13,1927	561	14,2508	607	15,3078	651
4,48	11,1185	472	12,1846	517	13,2488	562	14,3115	607	15,3729	653
4,49	11,1657	473	12,2363	518	13,3050	564	14,3722	609	15,4382	654
4,50	11,2130	474	12,2881	520	13,3614	565	14,4331	611	15,5036	656
4,51	11,2604	474	12,3401	521	13,4179	566	14,4942	612	15,5692	657
4,52	11,3078	476	12,3922	521	13,4745	568	14,5554	613	15,6349	659
4,53	11,3554	477	12,4443	523	13,5313	569	14,6167	614	15,7008	660
4,54	11,4031	478	12,4966	524	13,5882	569	14,6781	616	15,7668	662
4,55	11,4509	479	12,5490	526	13,6451	571	14,7397	617	15,8330	663
4,56	11,4988	480	12,6016	526	13,7022	573	14,8014	619	15,8993	665
4,57	11,5468	482	12,6542	527	13,7595	574	14,8633	619	15,9658	666
4,58	11,5950	482	12,7069	529	13,8169	575	14,9252	621	16,0324	667
4,59	11,6432	484	12,7598	530	13,8744	576	14,9873	623	16,0991	669
4,60	11,6916	484	12,8128	531	13,9320	578	15,0496	624	16,1660	670
4,61	11,7400	486	12,8659	533	13,9898	578	15,1120	626	16,2330	672
4,62	11,7886	486	12,9192	533	14,0476	580	15,1746	626	16,3002	673
4,63	11,8372	487	12,9725	534	14,1056	581	15,2372	628	16,3675	675
4,64	11,8859	488	13,0259	535	14,1637	583	15,3000	629	16,4350	676
4,65	11,9347	490	13,0794	537	14,2220	584	15,3629	631	16,5026	678
4,66	11,9837	491	13,1331	538	14,2804	585	15,4260	632	16,5704	679
4,67	12,0328	492	13,1869	539	14,3389	586	15,4892	634	16,6383	681
4,68	12,0820	493	13,2408	540	14,3975	587	15,5526	635	16,7064	682
4,69	12,1313	494	13,2948	541	14,4562	589	15,6161	636	16,7746	683
4,70	12,1607		13,3489		14,5151		15,6797		16,8429	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$ (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,8$	Diff.
4,70	6,2693	254	7,4678	303	6,6550	351	9,8348	400	11,0096	447
4,71	6,2947	254	7,4981	303	8,6901	352	9,6748	400	11,0543	446
4,72	6,3201	255	7,5284	304	6,7253	353	9,9146	402	11,0991	449
4,73	6,3456	256	7,5588	305	8,7606	353	9,9550	401	11,1440	450
4,74	6,3712	256	7,5893	305	6,7959	354	9,9951	402	11,1890	451
4,75	6,3968	256	7,6198	306	8,8313	355	10,0353	404	11,2341	452
4,76	6,4224	257	7,6504	307	6,8668	356	10,0757	405	11,2793	453
4,77	6,4481	258	7,6811	307	8,9024	356	10,1162	404	11,3246	453
4,78	6,4739	258	7,7118	308	8,9380	357	10,1566	406	11,3699	455
4,79	6,4997	259	7,7426	309	8,9737	359	10,1972	407	11,4154	456
4,80	6,5256	260	7,7735	309	9,0096	358	10,2379	408	11,4610	457
4,81	6 5516	260	7,6044	310	9,0454	359	10,2787	409	11,5067	456
4,82	6,5776	260	7,8354	310	9,0813	360	10,3196	409	11,5525	456
4,63	6,6036	261	7,6664	311	9,1173	362	10,3605	411	11,5983	460
4,64	6,6297	261	7,8975	312	9,1535	361	10,4016	411	11,6443	461
4,65	6,6558	262	7,9267	313	9,1896	363	10,4427	412	11,6904	461
4,66	6,6820	263	7,9600	313	9,2259	363	10,4839	413	11,7365	462
4,67	6,7083	263	7,9913	314	9,2622	364	10,5252	413	11,7627	463
4,68	6,7346	264	8,0227	314	9,2986	364	10,5665	415	11,6290	465
4,89	6,7610	264	8,0541	315	9,3350	366	10,6060	415	11,6755	465
4,90	6,7674	265	6,0856	316	9,3716	366	10,6495	417	11,9220	466
4,91	6,6139	265	8,1172	316	9,4062	367	10,6912	416	11,9666	467
4,92	6,8404	266	8,1488	317	9,4449	367	10,7328	418	12,0153	466
4,93	6,6670	266	8,1805	317	9,4616	369	10,7746	419	12,0621	469
4,94	6,8936	267	8,2122	318	9,5185	369	10,6165	420	12,1090	470
4,95	6,9203	268	8,2440	319	9,5554	370	10,8585	421	12,1560	471
4,96	6,9471	267	6,2759	320	9,5924	370	10,9006	421	12,2031	472
4,97	6,9736	269	8,3079	320	9,6294	372	10,9427	422	12,2503	473
4,98	7,0007	269	6,3399	321	9,6666	372	10,9849	423	12,2976	474
4,99	7,0276	270	6,3720	322	9,7036	373	11,0272	424	12,3450	475
5,00	7,0546		8,4042		9,7411		11,0696		12,3925	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
4,70	12,1807	495	13,3489	543	14,5151	591	15,6797	638	18,8429	685
4,71	12,2302	496	13,4032	544	14,5742	591	15,7435	639	18,9114	686
4,72	12,2798	496	13,4576	545	14,6333	593	15,8074	640	16,9800	688
4,73	12,3294	498	13,5121	546	14,6926	593	15,8714	641	17,0488	689
4,74	12,3792	499	13,5687	547	14,7519	595	15,9355	643	17,1177	691
4,75	12,4291	500	13,6214	548	14,8114	597	15,9998	644	17,1868	692
4,76	12,4791	502	13,6762	550	14,8711	598	16,0642	646	17,2560	694
4,77	12,5293	502	13,7312	550	14,9309	598	16,1288	647	17,3254	695
4,78	12,5795	503	13,7862	552	14,9907	600	16,1935	648	17,3949	697
4,79	12,6298	505	13,8414	553	15,0507	602	16,2583	650	17,4846	698
4,80	12,6803	505	13,8967	554	15,1109	602	16,3233	651	17,5344	699
4,81	12,7308	506	13,9521	555	15,1711	604	18,3884	852	17,6043	701
4,82	12,7814	508	14,0078	556	15,2315	605	16,4538	654	17,8744	702
4,83	12,8322	509	14,0632	558	15,2920	607	16,5190	656	17,7446	704
4,84	12,8831	509	14,1190	558	15,3527	607	18,5848	856	17,8150	708
4,85	12,9340	511	14,1748	560	15,4134	609	16,6502	858	17,8856	707
4,86	12,9851	512	14,2308	561	15,4743	810	16,7160	859	17,9563	708
4,87	13,0363	513	14,2869	582	15,5353	811	18,7819	860	18,0271	709
4,88	13,0878	514	14,3431	584	15,5964	613	16,8479	662	18,0980	711
4,89	13,1390	515	14,3995	564	15,6577	614	16,9141	863	18,1691	713
4,90	13,1905	515	14,4559	566	15,7191	815	16,9804	665	18,2404	714
4,91	13,2420	517	14,5125	568	15,7806	616	17,0469	666	18,3118	715
4,92	13,2937	518	14,5891	568	15,8422	618	17,1135	667	18,3833	717
4,93	13,3455	520	14,6259	569	15,9040	619	17,1802	669	18.4550	719
4,94	13,3975	520	14,6828	571	15,9659	620	17,2471	670	18,5269	720
4,95	13,4495	521	14,7399	571	16,0279	821	17,3141	672	18,5989	721
4,96	13,5016	522	14,7970	572	16,0900	823	17,3813	672	18,6710	723
4,97	13,5538	524	14,8542	574	16,1523	824	17,4485	674	18,7433	724
4,98	13,6082	524	14,9118	575	16,2147	825	17,5159	676	18,8157	726
4,99	13,6588	525	14,9691	578	16,2772	826	17,5835	677	18,8883	727
5,00	13,7111		15,0267		16,3398		17,6512		18,9610	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$ (*Arches incomplètes, dites en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,8$	Diff.
5,00	7,0548	270	8,4042	322	9,7411	373	11,0698	425	12,2925	475
5,01	7,0818	270	8,4364	323	9,7784	374	11,1121	425	12,4400	477
5,02	7,1086	272	8,4687	323	9,8158	375	11,1546	427	12,4877	477
5,03	7,1358	271	8,5010	321	9,8533	376	11,1973	427	12,5354	479
5,04	7,1829	273	8,5334	324	9,8909	377	11,2400	428	12,5833	479
5,05	7,1902	272	8,5658	328	9,9286	377	11,2828	429	12,8312	481
5,06	7,2174	274	8,5984	326	9,9663	378	11,3257	430	12,6793	481
5,07	7,2448	274	8,8310	327	10,0041	379	11,3687	431	12,7274	482
5,08	7,2722	275	8,6637	327	10,0420	380	11,4118	431	12,7758	484
5,09	7,2997	274	8,6964	328	10,0800	380	11,4549	433	12,8240	484
5,10	7,8271	276	8,7292	328	10,1180	381	11,4982	433	12,8724	485
5,11	7,3547	276	8,7620	329	10,1561	382	11,5415	434	12,9209	486
5,12	7,3823	277	8,7949	330	10,1943	382	11,5849	436	12,9695	487
5,13	7,4100	277	8,8279	331	10,2323	383	11,6285	435	13,0182	488
5,14	7,4377	277	8,8610	331	10,2708	384	11,6720	437	13,0670	489
5,15	7,4654	278	8,8941	332	10,3092	385	11,7157	437	13,1159	490
5,16	7,4932	279	8,9273	332	10,3477	386	11,7594	439	13,1649	491
5,17	7,5211	279	8,9605	333	10,3863	386	11,8033	439	13,2140	492
5,18	7,5490	280	8,9938	334	10,4249	387	11,8472	440	13,2632	492
5,19	7,5770	281	9,0272	334	10,4636	388	11,8912	440	13,3124	494
5,20	7,8051	281	9,0606	335	10,5024	389	11,9352	442	13,3618	495
5,21	7,6332	282	9,0941	336	10,5413	389	11,9794	443	13,4113	498
5,22	7,6614	282	9,1277	336	10,5802	390	12,0237	443	13,4609	497
5,23	7,6896	282	9,1813	337	10,6192	391	12,0680	445	13,5106	497
5,24	7,7178	283	9,1950	338	10,6583	391	12,1125	445	13,5603	499
5,25	7,7461	283	9,2288	338	10,6974	392	12,1570	448	13,6102	499
5,26	7,7744	284	9,2628	338	10,7366	394	12,2016	447	13,6601	501
5,27	7,8028	285	9,2964	340	10,7760	393	12,2483	447	13,7102	501
5,28	7,8313	285	9,3304	340	10,8153	395	12,2910	448	13,7603	502
5,29	7,8598	288	9,3644	341	10,8548	395	12,3358	450	13,8105	504
6,30	7,8884		9,3985		10,8943		12,3808		13,8609	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites en *arc de cercle*.)

$\frac{\theta}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
5,00	13,7111	527	15,0267	577	18,3398	828	17,6512	678	18,9610	728
5,01	13,7638	527	15,0844	578	16,4026	830	17,7190	680	19,0338	730
5,02	13,8185	529	15,1422	580	16,4656	830	17,7879	680	19,1088	732
5,03	13,8894	529	15,2002	580	18,5286	631	17,8550	682	19,1800	733
5,04	13,9223	531	15,2582	582	16,5917	832	17,9232	884	19,2533	734
5,05	13,9754	532	15,3184	583	16,6549	834	17,9916	665	19,3267	738
5,06	14,0286	532	15,3747	584	18,7183	836	18,0601	686	19,4003	738
5,07	14,0818	534	15,4331	585	16,7819	636	18,1287	888	19,4741	739
5,08	14,1352	535	15,4916	587	18,8455	638	18,1975	889	19,5480	740
5,09	14,1667	538	15,5503	587	16,9093	639	18,2664	890	19,6220	742
5,10	14,2423	537	15,6090	589	16,9732	640	18,3354	892	19,8962	743
5,11	14,2960	538	15,6679	589	17,0372	842	18,4046	693	19,7705	744
5,12	14,3498	539	15,7288	591	17,1014	642	18,4739	895	19,6449	746
5,13	14,4037	540	15,7859	592	17,1656	644	18,5434	696	19,9195	748
5,14	14,4577	541	15,8451	593	17,2300	645	18,8130	897	19,9943	749
5,15	14,5216	542	15,9044	595	17,2945	647	18,6827	698	20,0692	750
5,18	14,5660	544	15,9639	596	17,3592	648	18,7525	700	20,1442	752
5,17	14,6204	544	16,0235	596	17,4240	649	18,8225	701	20,2194	754
5,18	14,6748	546	16,0831	598	17,4889	650	18,8926	703	20,2948	755
5,19	14,7294	546	16,1429	599	17,5539	852	18,9629	704	20,3703	756
5,20	14,7840	548	18,2028	601	17,6191	853	19,0333	706	20,4459	757
5,21	14,8388	546	16,2629	801	17,6644	854	19,1039	706	20,5216	759
5,22	14,6936	550	16,3230	802	17,7498	855	19,1745	708	20,5975	781
5,23	14,9466	550	16,3832	604	17,8153	656	19,2453	709	20,6736	762
5,24	15,0036	552	18,4436	605	17,8809	658	19,3162	711	20,7498	764
5,25	15,0588	553	16,5041	606	17,9467	859	19,3873	712	20,8262	765
5,28	15,1141	554	16,5647	607	18,0126	860	19,4585	713	20,9027	768
5,27	15,1695	555	18,6254	608	18,0786	862	19,5298	715	20,9793	768
5,18	15,2250	556	16,8662	810	18,1448	663	19,6013	716	21,0561	769
5,29	15,2806	557	18,7472	610	18,2111	864	19,6729	717	21,1330	771
5,30	15,3383		16,8082		18,2775		19,7446		21,2101	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f}=0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f}=0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f}=0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f}=0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f}=0,8$	Diff.
5,30	7,8864	287	9,3985	341	10,8943	396	12,3808	450	13,8609	504
5,31	7,9171	287	9,4326	342	10,9339	397	12,4258	451	13,9113	505
5,32	7,9458	267	9,4668	343	10,9736	397	12,4709	452	13,9618	506
5,33	7,9745	288	9,5011	343	11,0133	398	12,5161	453	14,0124	507
5,34	8,0033	288	9,5354	344	11,0531	400	12,5614	453	14,0631	508
5,35	8,0321	289	9,5698	345	11,0931	399	12,6067	455	14,1169	509
5,36	8,0610	290	9,6043	345	11,1330	400	12,6522	455	14,1648	510
5,37	8,0900	290	9,6388	346	11,1730	402	12,6977	456	14,2158	511
5,38	8,1190	291	9,6734	347	11,2132	402	12,7433	457	14,2669	512
5,39	8,1481	291	9,7081	347	11,2534	403	12,7890	458	14,3181	512
5,40	8,1772	292	9,7428	348	11,2937	403	12,8346	459	14,3693	514
5,41	8,2064	292	9,7776	348	11,3340	404	12,8807	459	14,4207	515
5,42	8,2356	293	9,8124	349	11,3744	405	12,9266	461	14,4722	515
5,43	8,2649	293	9,8473	350	11,4149	406	12,9727	461	14,5237	517
5,44	6,2942	294	9,8823	351	11,4555	407	13,0188	462	14,5754	517
5,45	8,3236	294	9,9174	351	11,4962	407	13,0650	463	14,6271	519
5,46	8,3530	295	9,9525	352	11,5369	408	13,1113	464	14,6790	519
5,47	8,3825	296	9,9877	352	11,5777	408	13,1577	465	14,7309	520
5,48	8,4121	296	10,0229	353	11,6185	410	13,2042	465	14,7829	522
5,49	8,4417	297	10,0582	354	11,6595	410	13,2507	467	14,8351	522
5,50	8,4714	297	10,0936	354	11,7005	411	13,2974	467	14,8873	523
5,51	8,5011	298	10,1290	355	11,7416	411	13,3441	468	14,9396	525
5,52	8,5309	298	10,1645	355	11,7827	412	13,3909	469	14,9921	625
5,53	8,5607	298	10,2000	357	11,8239	414	13,4378	470	15,0446	526
5,54	8,5905	299	10,2357	357	11,8653	414	13,4848	470	15,0972	527
5,55	8,6204	301	10,2714	357	11,9067	415	13,5318	472	15,1499	527
5,56	8,6505	300	10,3071	358	11,9482	415	13,5790	472	15,2026	529
6,57	8,6805	301	10,3429	359	11,9897	416	13,6262	473	15,2555	531
5,58	8,7106	302	10,3788	359	12,0313	417	13,6735	474	15,3086	530
5,59	8,7408	301	10,4147	360	12,0730	418	13,7209	475	15,3616	532
5,60	8,7709		10,4507		12,1148		13,7684		15,4148	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
5,30	15,3363	558	16,8082	612	18,2775	665	19,7446	719	21,2101	772
5,31	15,3921	559	16,8694	612	18,3440	667	19,8165	720	21,2873	774
5,32	15,4480	560	16,9306	614	18,4107	667	19,8885	722	21,3647	775
5,33	15,5040	561	16,9920	616	18,4774	669	19,9607	723	21,4422	777
5,34	15,5601	562	17,0536	617	18,5443	670	20,0330	725	21,5199	778
5,35	15,6163	564	17,1153	617	18,6113	672	20,1055	725	21,5977	780
5,36	15,6727	564	17,1770	619	18,6785	673	20,1780	727	21,6757	781
5,37	15,7291	565	17,2389	619	18,7458	674	20,2507	728	21,7538	782
5,38	15,7856	567	17,3008	621	18,8132	675	20,3235	729	21,8320	784
5,39	15,8423	567	17,3629	622	18,8807	677	20,3964	731	21,9104	786
5,40	15,8990	569	17,4251	623	18,9484	678	20,4695	733	21,9890	787
5,41	15,9559	569	17,4874	625	19,0162	679	20,5428	734	22,0677	788
5,42	16,0128	571	17,5499	625	19,0841	681	20,6162	735	22,1465	790
5,43	16,0699	571	17,6124	627	19,1522	682	20,6897	736	22,2255	791
5,44	16,1270	573	17,6751	628	19,2204	683	20,7633	738	22,3046	792
5,45	16,1843	574	17,7379	629	19,2887	684	20,8371	739	22,3838	794
5,46	16,2417	575	17,8008	630	19,3571	685	20,9110	741	22,4632	796
5,47	16,2992	576	17,8638	631	19,4256	686	20,9851	742	22,5428	797
5,48	16,3568	577	17,9269	633	19,4942	688	21,0593	743	22,6225	799
5,49	16,4145	578	17,9902	634	19,5630	689	21,1336	744	22,7024	800
5,50	16,4723	579	18,0536	634	19,6319	690	21,2080	746	22,7824	801
5,51	16,5302	580	18,1170	636	19,7009	692	21,2825	747	22,8625	803
5,52	16,5882	581	18,1806	637	19,7701	693	21,3573	748	22,9428	804
5,53	16,6463	583	18,2443	639	19,8394	694	21,4321	751	23,0232	806
5,54	16,7046	583	18,3082	639	19,9088	696	21,5072	752	23,1038	807
5,55	16,7629	584	18,3721	641	19,9784	697	21,5824	752	23,1845	809
5,56	16,8213	586	18,4362	642	20,0481	697	21,6576	754	23,2654	810
5,57	16,8799	586	18,5004	642	20,1178	699	21,7330	755	23,346[illegible]	8[illegible]
5,58	16,9385	587	18,5646	644	20,1877	701	21,8085	757	23,4276	813
5,59	16,9972	589	18,6290	645	20,2578	702	21,8842	759	23,5089	814
5,60	17,0561		18,6935		20,3280		21,9601		23,5903	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^4}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_o}{f} = 0,4$	Diff.	$\frac{Y_o}{f} = 0,5$	Diff.	$\frac{Y_o}{f} = 0,6$	Diff.	$\frac{Y_o}{f} = 0,7$	Diff.	$\frac{Y_o}{f} = 0,8$	Diff.
5,60	8,7709	303	10,4507	361	12,1148	418	13,7684	475	15,4148	533
5,61	8,8012	303	10,4868	362	12,1566	419	13,8159	477	15,4681	533
5,62	8,8315	303	10,5230	362	12,1985	420	13,8636	478	15,5214	535
5,63	8,8618	305	10,5592	363	12,2405	421	13,9114	478	15,5749	536
5,64	8,8923	304	10,5955	363	12,2826	421	13,9592	479	15,6285	536
5,65	8,9227	306	10,6318	364	12,3247	422	14,0071	479	15,6821	538
5,66	8,9533	305	10,6682	364	12,3669	423	14,0550	481	15,7359	538
5,67	8,9838	307	10,7046	365	12,4092	424	14,1031	482	15,7897	539
5,68	9,0145	307	10,7411	367	12,4516	424	14,1513	482	15,8436	541
5,69	9,0452	307	10,7778	366	12,4940	425	14,1995	484	15,8977	541
5,70	9,0759	308	10,8144	367	12,5365	426	14,2479	484	15,9518	542
5,71	9,1067	308	10,8511	368	12,5791	426	14,2963	485	16,0060	543
5,72	9,1375	309	10,8879	369	12,6217	428	14,3448	486	16,0603	544
5,73	9,1684	310	10,9248	369	12,6645	428	14,3934	486	16,1147	546
5,74	9,1994	310	10,9617	369	12,7073	429	14,4420	488	16,1693	546
5,75	9,2304	311	10,9986	371	12,7502	429	14,4908	488	16,2239	547
5,76	9,2615	311	11,0357	371	12,7931	431	14,5396	490	16,2786	548
5,77	9,2926	312	11,0728	372	12,8362	431	14,5886	490	16,3334	549
5,78	9,3238	312	11,1100	372	12,8793	432	14,6376	491	16,3883	550
5,79	9,3550	313	11,1472	373	12,9225	432	14,6867	492	16,4433	550
5,80	9,3863	313	11,1845	374	12,9657	434	14,7359	493	16,4983	552
5,81	9,4176	314	11,2219	374	13,0091	434	14,7852	493	16,5535	553
5,82	9,4490	314	11,2593	375	13,0525	435	14,8345	494	16,6088	554
5,83	9,4804	315	11,2968	375	13,0960	435	14,8839	495	16,6642	554
5,84	9,5119	315	11,3343	377	13,1395	436	14,9334	496	16,7196	556
5,85	9,5434	316	11,3720	376	13,1831	437	14,9830	498	16,7752	556
5,86	9,5750	317	11,4096	378	13,2268	438	15,0328	497	16,8308	557
5,87	9,6067	317	11,4474	377	13,2706	439	15,0825	499	16,8865	559
5,88	9,6384	318	11,4851	379	13,3145	439	15,1324	499	16,9424	559
5,89	9,6702	318	11,5230	380	13,3584	440	15,1823	500	16,9983	560
5,90	9,7020		11,5610		13,4024		15,2323		17,0543	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
5,80	17,0581	590	18,6935	646	20,3280	703	21,9801	759	23,5903	816
5,61	17,1151	590	18,7581	848	20,3983	704	22,0360	761	23,6719	817
5,62	17,1741	592	18,8229	649	20,4687	705	22,1121	763	23,7538	819
5,83	17,2333	593	18,8878	650	20,5392	707	22,1884	763	23,8355	821
5,64	17,2926	594	18,9528	650	20,8099	707	22,2647	785	23,9176	822
5,85	17,3520	594	19,0178	652	20,8806	709	22,3412	768	23,9998	823
5,66	17,4114	598	19,0830	654	20,7515	711	22,4178	788	24,0821	825
5,87	17,4710	597	19,1484	654	20,8226	712	22,4946	769	24,1646	826
5,88	17,5307	598	19,2138	655	20,8938	713	22,5715	779	24,2472	827
5,89	17,5905	599	19,2793	657	20,9651	714	22,6485	771	24,3299	829
5,70	17,8504	800	19,3450	858	21,0365	716	22,7256	773	24,4128	831
5,71	17,7104	601	19,4108	859	21,1081	717	22,8029	775	24,4959	832
5,72	17,7705	603	19,4767	660	21,1798	718	22,8804	776	24,5791	833
5,73	17,8308	603	19,5427	661	21,2518	719	22,9580	777	24,8624	835
5,74	17,8911	604	19,6088	663	21,3235	720	23,0357	779	24,7459	836
5,75	17,9515	605	19,6751	663	21,3956	722	23,1136	779	24,8295	838
5,76	18,0120	607	19,7414	865	21,4677	723	23,1915	781	24,9133	839
5,77	18,0727	608	19,8079	668	21,5400	724	23,2696	783	24,9972	841
5,78	18,1335	808	19,8745	867	21,8124	726	23,3479	784	25,0813	842
5,79	18,1943	610	19,9412	688	21,6850	727	23,4263	786	25,1655	844
5,80	18,2553	810	20,0080	670	21,7577	728	23,5049	788	25,2499	845
5,81	18,3163	812	20,0750	671	21,8305	729	23,5835	788	25,3344	848
5,82	18,3775	813	20,1421	672	21,9034	730	23,6623	789	25,4190	848
5,83	18,4388	614	20,2093	872	21,9764	732	23,7412	791	25,5038	850
5,84	18,5002	614	20,2765	674	22,0496	733	23,8203	791	25,6888	851
5,85	18,5616	816	20,3439	675	22,1229	735	23,8994	793	25,8739	852
5,86	18,8132	817	20,4114	677	22,1964	735	23,9787	795	25,7591	854
5,87	18,8849	618	20,4791	877	22,2899	737	24,0582	796	25,8445	855
5,88	18,7467	819	20,5468	679	22,3436	738	24,1378	798	25,9300	857
5,89	13,8088	820	20,8147	679	22,4174	739	24,2176	799	28,0157	858
5,90	18,8706		20,6826		22,4913		24,2975		28,1015	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,8$	Diff.
5,90	9,7020	319	11,5610	380	13,4024	441	15,2323	502	17,0543	582
5,91	9,7339	319	11,5990	381	13,4465	441	15,2825	502	17,1105	562
5,92	9,7658	320	11,6371	381	13,4906	443	15,3327	503	17,1667	583
5,93	9,7978	320	11,6752	382	13,5349	443	15,3830	503	17,2230	564
5,94	9,8298	321	11,7134	383	13,5792	444	15,4333	504	17,2794	565
5,95	9,8619	322	11,7517	383	13,6236	444	15,4837	506	17,3359	566
5,98	9,8941	321	11,7900	384	13,6680	445	15,5343	506	17,3925	567
5,97	9,9262	323	11,8284	384	13,7125	446	15,5849	507	17,4492	568
5,98	9,9585	323	11,8668	386	13,7571	447	15,6356	508	17,5060	589
5,99	9,9908	324	11,9054	386	13,8018	447	15,6864	509	17,5629	570
6,00	10,0232	324	11,9440	386	13,8465	449	15,7373	510	17,6199	570
6,01	10,0556	325	11,9826	387	13,8914	449	15,7883	510	17,6769	571
6,02	10,0881	325	12,0213	388	13,9363	450	15,8393	511	17,7340	573
6,03	10,1206	326	12,0801	388	13,9813	450	15,8904	512	17,7913	574
6,04	10,1532	328	12,0989	389	14,9263	451	15,9416	514	17,8487	575
6,05	10,1858	326	12,1378	390	14,0714	452	15,9930	514	17,9062	575
6,06	10,2184	327	12,1768	390	14,1166	453	16,0444	515	17,9637	577
6,07	10,2511	329	12,2158	391	14,1619	453	16,0959	515	18,0214	577
6,08	10,2840	328	12,2549	391	14,2072	454	16,1474	516	18,0791	578
6,09	10,3168	329	12,2940	393	14,2526	455	16,1990	517	18,1369	580
8,10	10,3497	329	12,3333	393	14,2981	458	16,2507	519	18,1949	580
6,11	10,3826	330	12,3726	394	14,3437	457	16,3026	519	18,2529	582
6,12	10,4156	331	12,4120	394	14,3894	457	16,3545	520	18,3111	582
6,13	10,4487	332	12,4514	395	14,4351	458	16,4065	521	18,3693	583
6,14	10,4819	331	12,4909	395	14,4809	459	16,4586	521	18,4276	584
6,15	10,5150	333	12,5304	396	14,5268	459	16,5107	522	18,4860	595
6,18	10,5483	332	12,5700	397	14,5727	461	18,5629	524	18,5445	586
8,17	10,5815	334	12,8097	398	14,6188	461	16,6153	524	18,6031	587
6,18	10,6149	334	12,6495	398	14,6849	461	16,6677	525	18,6618	588
6,19	10,8483	334	12,6893	398	14,7110	462	16,7202	525	18,7206	589
6,20	10,6817		12,7291		14,7572		16,7727		18,7795	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^3}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1,3$	Diff.
5,90	18,8706	821	20,8828	681	22,4913	741	24,2975	800	28,1015	860
5,91	18,9327	623	20,7507	682	22,5854	742	24,3775	801	28,1876	881
5,92	18,9950	823	20,8189	883	22,6396	743	24,4576	803	28,2736	862
5,93	19,0573	824	20,8872	685	22,7139	744	24,5379	804	28,3698	864
5,94	19,1197	628	20,9557	686	22,7883	748	24,8183	808	26,4482	866
5,95	19,1823	626	21,0243	686	22,8629	748	24,6989	807	28,5328	867
5,96	19,2449	828	21,0929	688	22,9375	748	24,7796	808	26,6195	868
5,97	19,3077	628	21,1617	689	23,0123	750	24,8804	810	26,7083	870
5,98	19,3706	630	21,2308	690	23,0873	751	24,9414	811	28,7933	871
5,99	19,4335	631	21,2996	691	23,1624	752	25,0225	812	26,8804	873
6,00	19,4968	631	21,3687	893	23,2378	753	25,1037	814	28,9677	874
6,01	19,5597	633	21,4380	694	23,3129	754	25,1851	815	27,0551	876
6,02	19,8230	833	21,5074	694	23,3883	758	25,2868	818	27,1427	877
8,03	19,6883	635	21,5768	698	23,4839	757	25,3482	818	27,2304	879
6,04	19,7498	636	21,8464	897	23,5398	758	25,4300	819	27,3183	880
6,05	19,8134	837	21,7161	698	23,6154	780	25,5119	820	27,4063	881
8,06	19,8771	838	21,7859	699	23,6914	760	25,5939	822	27,4944	883
8,07	19,9409	639	21,8558	701	23,7674	782	25,8761	823	27,5827	884
6,08	20,0048	840	21,9259	702	23,8436	783	25,7584	825	27,6711	886
8,09	20,0688	641	21,9981	703	23,9199	784	25,8409	826	27,7597	887
8,10	20,1329	642	22,0664	704	23,9963	766	25,9235	827	27,8484	889
8,11	20,1971	843	22,1368	705	24,0729	767	26,0062	829	27,9373	890
6,12	20,2814	645	22,2073	706	24,1496	768	26,0891	830	28,0283	892
6,13	20,3259	645	22,2779	707	24,2284	769	28,1721	831	28,1155	893
6,14	20,3904	847	22,3488	709	24,3033	771	28,2552	832	28,2048	895
6,15	20,4551	847	22,4195	710	24,3804	772	26,3384	834	28,2943	898
8,16	20,5198	649	22,4905	711	24,4578	773	26,4218	836	28,3839	897
6,17	20,5847	849	22,5818	712	24,5349	774	26,6054	837	28,4738	899
8,18	20,8496	651	22,6328	713	24,6123	778	28,5891	838	28,5635	901
6,19	20,7147	651	22,7041	715	24,6899	777	28,6729	839	28,8538	902
6,20	20,7798		22,7758		24,7676		26,7568		28,7438	

TABLE II.

VALEURS DE $\frac{\delta(Q^2)}{c^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,4$	$\frac{Y_0}{f} = 0,5$	$\frac{Y_0}{f} = 0,6$	$\frac{Y_0}{f} = 0,7$	$\frac{Y_0}{f} = 0,8$
3,5	0,3407	0,3431	0,3455	0,3479	0,3503
3,6	0,3403	0,3426	0,3449	0,3471	0,3494
3,7	0,3400	0,3421	0,3443	0,3464	0,3486
3,8	0,3397	0,3417	0,3437	0,3458	0,3479
3,9	0,3394	0,3413	0,3432	0,3452	0,3472
4,0	0,3391	0,3409	0,3428	0,3446	0,3465
4,1	0,3389	0,3406	0,3424	0,3441	0,3459
4,2	0,3386	0,3403	0,3420	0,3437	0,3454
4,3	0,3384	0,3400	0,3416	0,3432	0,3449
4,4	0,3382	0,3397	0,3412	0,3428	0,3444
4,5	0,3380	0,3394	0,3409	0,3424	0,3439
4,6	0,3378	0,3392	0,3406	0,3420	0,3435
4,7	0,3376	0,3389	0,3403	0,3417	0,3431
4,8	0,3375	0,3387	0,3400	0,3413	0,3427
4,9	0,3373	0,3385	0,3398	0,3410	0,3423
5,0	0,3371	0,3383	0,3395	0,3407	0,3420
5,1	0,3370	0,3381	0,3393	0,3405	0,3416
5,2	0,3369	0,3379	0,3391	0,3402	0,3413
5,3	0,3367	0,3378	0,3389	0,3400	0,3410
5,4	0,3366	0,3376	0,3387	0,3397	0,3408
5,5	0,3365	0,3375	0,3385	0,3395	0,3405
5,6	0,3364	0,3373	0,3383	0,3393	0,3403
5,7	0,3363	0,3372	0,3381	0,3391	0,3400
5,8	0,3362	0,3371	0,3380	0,3389	0,3398
5,9	0,3361	0,3369	0,3378	0,3387	0,3396
6,0	0,3360	0,3368	0,3377	0,3385	0,3394
6,1	0,3359	0,3367	0,3375	0,3384	0,3392
6,2	0,3358	0,3366	0,3374	0,3382	0,3390

TABLE II.

VALEURS DE $\frac{\delta(Q^2)}{c^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,9$	$\frac{Y_0}{f} = 1,0$	$\frac{Y_0}{f} = 1,1$	$\frac{Y_0}{f} = 1,2$	$\frac{Y_0}{f} = 1,3$
3,5	0,3527	0,3552	0,3577	0,3601	0,3626
3,6	0,3517	0,3541	0,3565	0,3588	0,3612
3,7	0,3508	0,3531	0,3553	0,3575	0,3597
3,8	0,3500	0,3521	0,3542	0,3563	0,3584
3,9	0,3492	0,3512	0,3532	0,3552	0,3572
4,0	0,3484	0,3504	0,3523	0,3542	0,3561
4,1	0,3477	0,3496	0,3514	0,3532	0,3551
4,2	0,3471	0,3489	0,3506	0,3523	0,3541
4,3	0,3465	0,3482	0,3498	0,3515	0,3532
4,4	0,3459	0,3475	0,3491	0,3507	0,3524
4,5	0,3454	0,3469	0,3485	0,3500	0,3516
4,6	0,3449	0,3464	0,3479	0,3493	0,3508
4,7	0,3445	0,3459	0,3473	0,3487	0,3501
4,8	0,3440	0,3454	0,3467	0,3481	0,3494
4,9	0,3436	0,3449	0,3462	0,3475	0,3488
5,0	0,3432	0,3445	0,3458	0,3470	0,3482
5,1	0,3428	0,3440	0,3453	0,3465	0,3477
5,2	0,3425	0,3436	0,3448	0,3460	0,3471
5,3	0,3421	0,3432	0,3444	0,3455	0,3466
5,4	0,3418	0,3429	0,3440	0,3450	0,3461
5,5	0,3415	0,3426	0,3436	0,3446	0,3457
5,6	0,3412	0,3422	0,3432	0,3443	0,3453
5,7	0,3410	0,3419	0,3429	0,3439	0,3449
5,8	0,3407	0,3417	0,3426	0,3436	0,3445
5,9	0,3405	0,3414	0,3423	0,3432	0,3441
6,0	0,3403	0,3411	0,3420	0,3429	0,3438
6,1	0,3401	0,3409	0,3417	0,3426	0,3435
6,2	0,3399	0,3407	0,3415	0,3423	0,3432

TABLE III.

ARCHES COMPLÈTES, OU EN ANSE DE PANIER.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,670	0,94098	230	1,40444	134	0,700	1,01297	251	1,44710	152
671	0,94328	231	1,40578	135	701	1,01548	252	1,44862	152
672	0,94559	232	1,40713	135	702	1,01800	252	1,45014	153
673	0,94791	232	1,40848	136	703	1,02052	254	1,45167	153
674	0,95023	233	1,40984	136	704	1,02306	254	1,45320	154
0,675	0,95256	234	1,41120	137	0,705	1,02560	254	1,45474	155
676	0,95490	234	1,41257	137	706	1,02814	256	1,45629	156
677	0,95724	235	1,41394	138	707	1,03070	256	1,45785	156
678	0,95959	235	1,41532	138	708	1,03326	257	1,45941	157
679	0,96194	236	1,41670	139	709	1,03583	258	1,46098	158
0,680	0,96430	237	1,41809	139	0,710	1,03841	259	1,46256	158
681	0,96667	237	1,41948	140	711	1,04100	260	1,46414	159
682	0,96904	238	1,42088	141	712	1,04360	260	1,46573	160
683	0,97142	239	1,42229	141	713	1,04620	261	1,46733	160
684	0,97381	240	1,42370	142	714	1,04881	262	1,46893	161
0,685	0,97621	240	1,42512	142	0,715	1,05143	263	1,47054	162
686	0,97861	241	1,42654	143	716	1,05406	264	1,47216	162
687	0,98102	241	1,42797	144	717	1,05670	265	1,47378	163
688	0,98343	242	1,42941	144	718	1,05935	265	1,47541	164
689	0,98585	243	1,43085	145	719	1,06200	267	1,47705	165
0,690	0,98828	244	1,43230	145	0,720	1,06467	267	1,47870	166
691	0,99072	244	1,43375	146	721	1,06734	268	1,48036	166
692	0,99316	245	1,43521	146	722	1,07002	269	1,48202	167
693	0,99561	246	1,43667	147	723	1,07271	270	1,48369	168
694	0,99807	247	1,43814	148	724	1,07541	270	1,48537	168
0,695	1,00054	247	1,43962	149	0,725	1,07811	272	1,48705	169
696	1,00301	248	1,44111	149	726	1,08083	272	1,48874	170
697	1,00549	249	1,44260	149	727	1,08355	274	1,49044	171
698	1,00798	249	1,44409	150	728	1,08629	274	1,49215	172
699	1,01047	250	1,44559	151	729	1,08903	275	1,49387	173
0,700	1,01297		1,44710		0,730	1,09178		1,49560	

TABLE III.

ARCHES COMPLÈTES, OU EN ANSE DE PANIER.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,730	1,09178	277	1,49560	173	0,760	1,17908	308	1,55142	201
731	1,09455	277	1,49733	174	761	1,18216	309	1,55343	202
732	1,09732	278	1,49907	175	762	1,18525	310	1,55545	203
733	1,10010	279	1,50082	176	763	1,18835	312	1,55748	204
734	1,10289	280	1,50258	176	764	1,19147	313	1,55952	205
0,735	1,10569	281	1,50434	178	0,765	1,19460	314	1,56157	206
736	1,10850	282	1,50612	178	766	1,19774	316	1,56363	208
737	1,11132	283	1,50790	179	767	1,20090	316	1,56571	208
738	1,11415	284	1,50969	180	768	1,20406	318	1,56779	210
739	1,11699	285	1,51149	181	769	1,20724	320	1,56989	210
0,740	1,11984	286	1,51330	182	0,770	1,21044	320	1,57199	212
741	1,12270	287	1,51512	182	771	1,21364	322	1,57411	213
742	1,12557	288	1,51694	184	772	1,21686	323	1,57624	215
743	1,12845	289	1,51878	184	773	1,22009	325	1,57839	215
744	1,13134	291	1,52062	186	774	1,22334	326	1,58054	216
0,745	1,13425	291	1,52248	186	0,775	1,22660	327	1,58270	218
746	1,13716	292	1,52434	187	776	1,22987	328	1,58488	219
747	1,14008	293	1,52621	188	777	1,23315	330	1,58707	220
748	1,14301	295	1,52809	189	778	1,23645	332	1,58927	222
749	1,14596	295	1,52998	190	779	1,23977	333	1,59149	222
0,750	1,14891	297	1,53188	191	0,780	1,24310	334	1,59371	224
751	1,15188	297	1,53379	192	781	1,24644	336	1,59595	225
752	1,15485	299	1,53571	193	782	1,24980	337	1,59820	227
753	1,15784	300	1,53764	194	783	1,25317	338	1,60047	227
754	1,16084	301	1,53958	195	784	1,25655	340	1,60274	229
0,755	1,16385	302	1,54153	195	0,785	1,25995	342	1,60503	231
756	1,16687	304	1,54348	197	786	1,26337	343	1,60734	231
757	1,16991	304	1,54545	198	787	1,26680	344	1,60965	233
758	1,17295	306	1,54743	199	788	1,27024	346	1,61198	235
759	1,17601	307	1,54942	200	789	1,27370	348	1,61433	236
0,760	1,17908		1,55142		0,790	1,27718		1,61669	

TABLE III.

ARCHES COMPLÈTES, OU EN ANSE DE PANIER.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,790	1,27718	349	1,61669	237	0,820	1,38952	405	1,69454	286
791	1,28067	351	1,61906	238	821	1,39357	486	1,69740	288
792	1,28418	352	1,62144	240	822	1,39763	409	1,70028	290
793	1,28770	354	1,62384	241	823	1,40172	411	1,70318	292
794	1,29124	356	1,62625	243	824	1,40583	413	1,70610	295
0,795	1,29480	357	1,62868	244	0,825	1,40996	416	1,70905	296
796	1,29837	359	1,63112	246	826	1,41412	418	1,71201	298
797	1,30196	361	1,63358	247	827	1,41830	420	1,71499	300
798	1,30557	362	1,63605	249	828	1,42250	422	1,71799	303
799	1,30919	364	1,63854	250	829	1,42672	425	1,72102	304
0,800	1,31283	366	1,64104	252	0,830	1,43097	427	1,72406	307
801	1,31649	368	1,64356	253	831	1,43524	430	1,72713	309
802	1,32017	369	1,64609	255	832	1,43954	432	1,73022	311
803	1,32386	371	1,64864	256	833	1,44386	435	1,73333	313
804	1,32757	373	1,65120	258	834	1,44821	437	1,73646	316
0,805	1,33130	374	1,65378	260	0,835	1,45258	440	1,73962	318
806	1,33504	377	1,65638	261	836	1,45698	442	1,74280	320
807	1,33881	378	1,65899	263	837	1,46140	445	1,74600	323
808	1,34259	381	1,66162	265	838	1,46585	448	1,74923	325
809	1,34640	382	1,66427	267	839	1,47033	450	1,75248	327
0,810	1,35022	384	1,66694	268	0,840	1,47483	453	1,75575	330
811	1,35406	386	1,66962	269	841	1,47936	456	1,75905	332
812	1,35792	388	1,67231	272	842	1,48392	458	1,76237	335
813	1,36180	390	1,67503	273	843	1,48850	462	1,76572	338
814	1,36570	392	1,67776	275	844	1,49312	464	1,76910	340
0,815	1,36962	394	1,68051	277	0,845	1,49776	467	1,77250	342
816	1,37356	396	1,68328	279	846	1,50243	470	1,77592	346
817	1,37752	398	1,68607	280	847	1,50713	473	1,77938	348
818	1,38150	400	1,68887	283	848	1,51186	476	1,78286	350
819	1,38550	402	1,69170	284	849	1,51662	479	1,78636	354
0,820	1,38952		1,69454		0,850	1,52141		1,78990	

TABLE III.

ARCHES COMPLÈTES, OU EN ANSE DE PANIER.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,850	1,52141	483	1,78990	356	0,880	1,68177	600	1,91110	464
851	1,52624	485	1,79346	359	881	1,68777	604	1,91574	468
852	1,53109	488	1,79705	362	882	1,69381	610	1,92042	473
853	1,53597	492	1,80067	365	883	1,69991	815	1,92515	478
854	1,54089	495	1,80432	368	884	1,70606	620	1,92993	482
0,855	1,54584	499	1,80800	371	0,885	1,71226	625	1,93475	487
856	1,55083	501	1,81171	374	886	1,71851	630	1,93962	493
857	1,55584	505	1,81545	377	887	1,72481	636	1,94455	497
858	1,56089	509	1,81922	381	888	1,73117	642	1,94952	502
859	1,56598	512	1,82303	383	889	1,73759	647	1,95454	508
0,860	1,57110	516	1,82686	387	0,890	1,74406	653	1,95962	513
861	1,57626	519	1,83073	390	891	1,75059	659	1,96475	519
862	1,58145	523	1,83463	393	892	1,75718	665	1,96994	524
863	1,58668	527	1,83856	397	893	1,76383	672	1,97518	530
864	1,59195	530	1,84253	400	894	1,77055	677	1,98048	535
0,865	1,59725	534	1,84653	404	0,895	1,77732	684	1,98583	542
866	1,60259	539	1,85057	407	896	1,78416	690	1,99125	547
867	1,60798	542	1,85464	411	897	1,79106	697	1,99672	554
868	1,61340	546	1,85875	415	898	1,79803	704	2,00226	560
869	1,61886	550	1,86290	418	899	1,80507	710	2,00786	566
0,870	1,62436	554	1,86708	422	0,900	1,81217	718	2,01352	573
871	1,62990	659	1,87130	426	901	1,81935	724	2,01925	580
872	1,63549	563	1,87556	430	902	1,82659	732	2,02505	586
873	1,64112	567	1,87988	434	903	1,83391	740	2,03091	594
874	1,64679	572	1,88420	438	904	1,84131	747	2,03685	600
0,875	1,65251	576	1,88858	442	0,905	1,84878	755	2,04285	608
876	1,65827	580	1,89300	446	906	1,85633	763	2,04893	615
877	1,68407	586	1,89746	450	907	1,86398	771	2,05508	623
878	1,66993	590	1,90196	455	908	1,87167	779	2,06131	630
879	1,67583	594	1,90651	459	909	1,87946	788	2,06761	638
0,880	1,68177		1,91110		0,910	1,88734		2,07399	

TABLE III.

ARCHES COMPLÈTES, OU EN ANSE DE PANIER.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,910	1,88734	796	2,07399	647	0,940	2,17571	1193	2,31456	1022
911	1,89530	605	2,08046	655	941	2,18764	1213	2,32480	1041
912	1,90335	814	2,08701	663	942	2,19977	1234	2,33521	1062
913	1,91149	824	2,09364	672	943	2,21211	1256	2,34583	1082
914	1,91973	833	2,10036	681	944	2,22467	1279	2,35665	1103
0,915	1,92806	843	2,10717	690	0,945	2,23746	1302	2,36766	1126
916	1,93649	853	2,11407	700	946	2,25048	1326	2,37894	1149
917	1,94502	863	2,12107	709	947	2,26374	1351	2,39043	1173
918	1,95365	874	2,12816	719	948	2,27725	1877	2,40216	1198
919	1,96239	884	2,13535	729	949	2,29102	1404	2,41414	1224
0,920	1,97123	895	2,14264	740	0,950	2,30506	1433	2,42638	1251
921	1,98016	907	2,15004	750	951	2,31939	1462	2,43889	1280
922	1,98925	918	2,15754	761	952	2,33401	1493	2,45169	1309
923	1,99843	930	2,16515	772	953	2,34894	1524	2,46478	1340
924	2,00773	942	2,17287	783	954	2,36416	1558	2,47818	1371
0,925	2,01715	955	2,18070	796	0,955	2,37976	1593	2,49169	1405
926	2,02670	967	2,18866	808	956	2,39569	1629	2,50594	1441
927	2,03637	981	2,19674	820	957	2,41198	1667	2,52035	1478
926	2,04618	994	2,20494	833	958	2,42865	1708	2,53513	1510
929	2,05612	1009	2,21327	846	959	2,44573	1749	2,55029	1557
0,930	2,06621	1022	2,22173	859	0,960	2,46322	1791	2,56586	1599
931	2,07643	1038	2,23032	874	961	2,46116	1840	2,58185	1644
932	2,08681	1052	2,23906	889	962	2,49956	1889	2,59829	1692
933	2,09733	1069	2,24795	903	963	2,51845	1940	2,61521	1742
934	2,10802	1084	2,25698	919	964	2,53785	1995	2,63263	1794
0,935	2,11886	1102	2,26617	934	0,965	2,55760	2053	2,65057	1851
936	2,12968	1118	2,27551	951	966	2,57633	2114	2,66908	1910
937	2,14106	1136	2,26502	968	967	2,59947	2179	2,68818	1973
938	2,15242	1155	2,29470	985	968	2,62126	2248	2,70791	2040
939	2,16397	1174	2,30455	1003	969	2,64374	2321	2,72831	2112
0,940	2,17571		2,31458		0,970	2,66695		2,74943	

TABLE III.

ARCHES COMPLÈTES, OU EN ANSE DE PANIER.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,970	2,88895	2400	2,74943	2189	0,985	3,15740	4880	3,20548	4624
971	2,69095	2484	2,77132	2270	988	3,20620	5242	3,25172	4982
972	2,71579	2574	2,79402	2358	987	3,25862	5661	3,30154	5395
973	2,74153	2671	2,81760	2453	988	3,31523	8154	3,35549	5883
974	2,76824	2776	2,84213	2556	989	3,37877	6740	3,41432	6464
0,975	2,79600	2888	2,86769	2686	0,990	3,44417	7451	3,47896	7168
976	2,82488	3012	2,89435	2786	991	3,51888	8330	3,55064	8039
977	2,85500	3145	2,92221	2917	992	3,60198	9443	3,63103	9144
978	2,88645	3292	2,95138	3061	993	3,89641	10901	3,72247	10592
979	2,91937	3452	2,98199	3218	994	3,80542	12892	3,82839	12572
0,980	2,95389	3629	3,01417	3392	0,995	3,93434	15779	3,95411	15446
981	2,99018	3825	3,04809	3585	996	4,09213	20343	4,10857	19992
982	3,02843	4043	3,08394	3800	997	4,29558	28871	4,30849	28297
983	3,06886	4289	3,12194	4040	998	4,58227	49013	4,59146	48602
984	3,11175	4585	3,18234	4314	999	5,07240	∞	5,07748	∞
0,985	3,15740		3,20548		1,000	∞		∞	

TABLE IV.

ARCHES COMPLÈTES,
OU EN ANSE DE PANIER.

Table pour corriger la valeur de f,
étant donnés g et Y_1.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{Y_1}{e^2}\delta f$	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{Y_1}{e^2}\delta f$
0,67	+ 0,0005	0,78	+ 0,0001
68	0,0004	79	0,0001
69	0,0004	80	0,0001
70	0,0003	81	0,0001
71	0,0003	82	0,0001
72	0,0003	83	0,0000
73	0,0002	84	0,0000
74	0,0002	..	0,0000
75	0,0002	..	0,0000
76	0,0001	..	0,0000
77	0,0001	..	0,0000
78	0,0001	1,00	0

TABLE V.

ARCHES COMPLÈTES,
OU EN ANSE DE PANIER.

Table pour corriger la valeur de Y_1,
étant donnés f et g.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{Y_1}{e^2}\delta Y_1$	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{Y_1}{e^2}\delta Y_1$
0,67	— 0,0024	0,78	— 0,0003
68	— 0,0020	79	— 0,0003
69	— 0,0017	80	— 0,0002
70	— 0,0015	81	— 0,0002
71	— 0,0012	82	— 0,0001
72	— 0,0010	83	— 0,0001
73	— 0,0009	84	— 0,0001
74	— 0,0007	85	— 0,0001
75	— 0,0006	86	— 0,0001
76	— 0,0005	87	— 0,0000
77	— 0,0004	..	— 0,0000
78	— 0,0003	1,00	0

FIN.



TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

DEUXIÈME PARTIE.

ADDITIONS.

TABLES.

FIN DE LA TABLE.

Arc d'ellipse.

Arc de cercle.

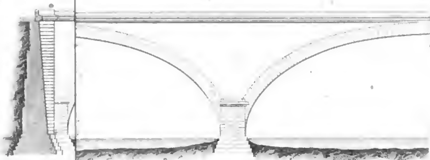
Arc de cercle.

ARCHE

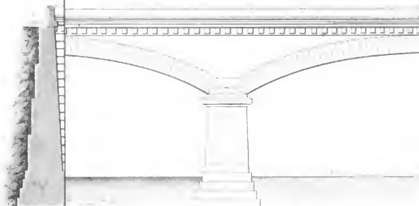
Échelle de … pour mètre.

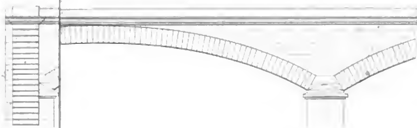
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10m

Gravé sur pierre à l'Imprimerie Impériale









Gravé sur pierre à l'Imprimerie Impériale.



